



**Quantifizierung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken  
in Versicherungsunternehmen**

**WP/Aktuar Prof. Dr. Tristan Nguyen und**

**Dipl.-WiWi Robert Danilo Molinari**

**WHL Wissenschaftliche Hochschule Lahr**

**Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre / Versicherungs- und**

**Gesundheitsökonomik**

## Zusammenfassung

Mit dem angedachten Solvabilitätssystem Solvency II werden Versicherer das erforderliche Solvenzkapital anhand ihrer tatsächlichen Risikosituation ermitteln müssen. Um diese zu bestimmen und zu quantifizieren, ist die Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen den Risiken verschiedener Kategorien notwendig. Der vorliegende Beitrag beschreibt die Möglichkeiten, die hierfür zur Verfügung stehen. Neben der Erfassung von Abhängigkeiten zwischen Risiken durch den linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson ist auch deren Messung durch andere Kennzahlen, die demgegenüber gewisse Vorteile bieten, wie Spearman's Rangkorrelation oder Kendall's  $\tau$ , denkbar. Einen völligen anderen Ansatz stellt das Konzept der Copulae bereit. Copulae ermöglichen eine vollständige Information über die Abhängigkeiten zwischen Risiken, indem durch ihre Anwendung die multivariate Verteilung der die Einzelrisiken beschreibenden Zufallsvariablen ermittelt werden kann. Dieses Konzept soll deshalb zunächst ausführlich erläutert werden, bevor auf seine mögliche Umsetzung in Versicherungsunternehmen eingegangen wird. Der Beitrag schließt mit einer Darstellung von wichtigen Eigenschaften für Abhängigkeitsmaße und der Bewertung der vorgestellten Konzepte zur Messung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken.

Schlagwörter: Abhängigkeit, Copulae, Risikomodelle, aktuarielle Modelle

## Abstract

In the course of the new solvency regulations "Solvency II" insurance companies will have to determine the required solvency capital on the basis of their actual risk situation. In order to calculate and to quantify the risk situation, it is necessary to take into account the dependencies between the risks arising from different risk categories. This article first outlines the available alternatives to measure risk dependencies. Besides the consideration through the Pearson correlation coefficient, dependencies between risks can also be measured by the use of other methods that show some advantages, e. g. Spearman's rank correlation or Kendall's  $\tau$ . A totally different approach is given by the concept of copulae. Copulae can fully inform about dependencies between risks by providing the multivariate distribution of those random variables that characterize the single risks. Therefore we will explain this concept elaborately in the first step, before going into its possible implementation in insurance companies. The article ends with a description of important characteristics with respect to dependency measurement and an evaluation of the former described concepts for measuring dependencies between risks.

Key Words: Dependency, Copulas, Risk models, Actuarial models

# Quantifizierung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken in Versicherungsunternehmen

Tristan Nguyen und Robert Danilo Molinari\*

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG .....</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>SPEZIELLE ABHÄNGIGKEITSMASSE .....</b>	<b>30</b>
2.1	LINEARER KORRELATIONSKOEFFIZIENT NACH PEARSON.....	30
2.2	SPEARMAN'S RANGKORRELATION UND KENDALL'S T.....	33
2.3	MAß FÜR DIE ABHÄNGIGKEIT IN DEN VERTEILUNGSSENDEN.....	34
<b>3</b>	<b>ERMITTLUNG VON ABHÄNGIGKEITEN MITTELS MULTIVARIATER VERTEILUNGEN .</b>	<b>35</b>
3.1	MULTIVARIATE VERTEILUNGEN .....	35
3.2	COPULAE .....	37
3.3	ERMITTLUNG VON COPULAE UND MULTIVARIATEN VERTEILUNGEN .....	45
<b>4</b>	<b>BEURTEILUNG.....</b>	<b>46</b>
4.1	WÜNSCHENSWERTE EIGENSCHAFTEN FÜR ABHÄNGIGKEITSMASSE.....	47
4.2	BEURTEILUNG DER VORGESTELLTEN KONZEPTE .....	48
	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>50</b>

## 1 Einleitung

Unter dem neuen europaeinheitlichen Solvabilitätssystem „Solvency II“ werden die Eigenkapitalanforderungen der Versicherungsunternehmen grundlegend verändert. Dabei sollen die Kapitalanforderungen die *gesamte* Risikolage des Unternehmens möglichst genau und korrekt widerspiegeln. Wenn die einzelnen Risiken in einem Versicherungsunternehmen mittels eines Risikomaßes quantifiziert sind, kann das *Gesamtrisiko* jedoch nicht durch bloße Addition der Kapitalanforderungen für die Einzelrisiken ermittelt werden. Dies würde vollständige Abhängigkeit zwischen den Risiken bedeuten und somit evtl. tatsächlich vorhandene Diversifikationseffekte ignorieren. Andererseits kann die generelle Unterstellung von Unabhängigkeit zwischen den Einzelrisiken zu einer signifikanten Unterschätzung des Gesamtrisikos führen, da einige Risiken in Versicherungsunternehmen sich gegenseitig bedingen (Kumul-, Katastrophen- oder Ansteckungsrisiken).

---

\* WP/Aktuar Prof. Dr. Tristan Nguyen ist Inhaber des Lehrstuhls für Volkswirtschaftslehre / Versicherungs- und Gesundheitsökonomik an der WHL Wissenschaftliche Hochschule Lahr, Dipl.-WiWi Robert Danilo Molinari ist Doktorand am obigen Lehrstuhl.

Gerade in der Versicherungsbranche bestehen bedeutende Abhängigkeiten, z. B. bei extremen Situationen, wie Terroranschlägen, oder bei Ereignissen, die Kumulschäden auslösen. Deshalb müssen die Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Einzelrisiken möglichst präzise berücksichtigt werden.<sup>1</sup> Dafür stehen verschiedene mathematische Methoden zur Verfügung, die im Folgenden erläutert und anschließend bewertet werden sollen. Hierbei soll zunächst auf spezielle Abhängigkeitsmaße eingegangen werden, bevor die Modellierung von Abhängigkeiten mittels multivariater Verteilungen in Verbindung mit Copulae dargestellt wird. Abschließend erfolgt eine kritische Beurteilung der vorgestellten Konzepte.

## 2 Spezielle Abhängigkeitsmaße

Zunächst wird auf spezielle Abhängigkeitsmaßzahlen eingegangen, die die Abhängigkeit zwischen mehreren Risiken in einer einzigen Zahl darstellen. Diese sind deshalb relativ einfach handhabbar. Allerdings ergeben sich bei ihrer Anwendung auch einige Schwierigkeiten, die bei der Beurteilung aufgezeigt werden. Das wohl bekannteste Abhängigkeitsmaß ist der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, der zuerst vorgestellt werden soll. Zudem soll aber auch auf andere Abhängigkeitsmaßzahlen eingegangen werden, die gegenüber dem linearen Korrelationskoeffizienten einige Vorteile aufweisen.

### 2.1 Linearer Korrelationskoeffizient nach Pearson

Eine erste einfache Möglichkeit,<sup>2</sup> stochastische Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen, die beispielsweise Schadenhöhen darstellen, zu erfassen, ergibt sich durch den linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson. Er ist wie folgt definiert:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) * \text{Var}(Y)}}$$

wobei  $\rho(X, Y)$  der lineare Korrelationskoeffizient von  $X$  und  $Y$ ,

$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$  die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  und

$\text{Var}(X)$  sowie  $\text{Var}(Y)$  die endlichen Varianzen von  $X$  und  $Y$  sind.

#### Formel 1: Korrelationskoeffizient nach Pearson

<sup>1</sup> Vgl. auch *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 75.

<sup>2</sup> Vgl. z. B. *Szegö, G.* (2002), S. 1254 und *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 7.

Im mehrdimensionalen Fall muss die Korrelationsmatrix angewendet werden. In diesem Fall seien  $X = (X_1, \dots, X_n)$  und  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  quadratisch integrierbare Zufallsvektoren. Dann ergibt sich die symmetrische und positiv semi-definite Korrelationsmatrix zu:

$$\rho(X, Y) = \begin{pmatrix} \rho(X_1, Y_1) & \cdots & \rho(X_1, Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, Y_1) & \cdots & \rho(X_n, Y_n) \end{pmatrix},$$

d. h.  $\rho(X, Y)_{a,b} = \rho(X_a, Y_b)$ ,  $1 \leq a, b \leq n$

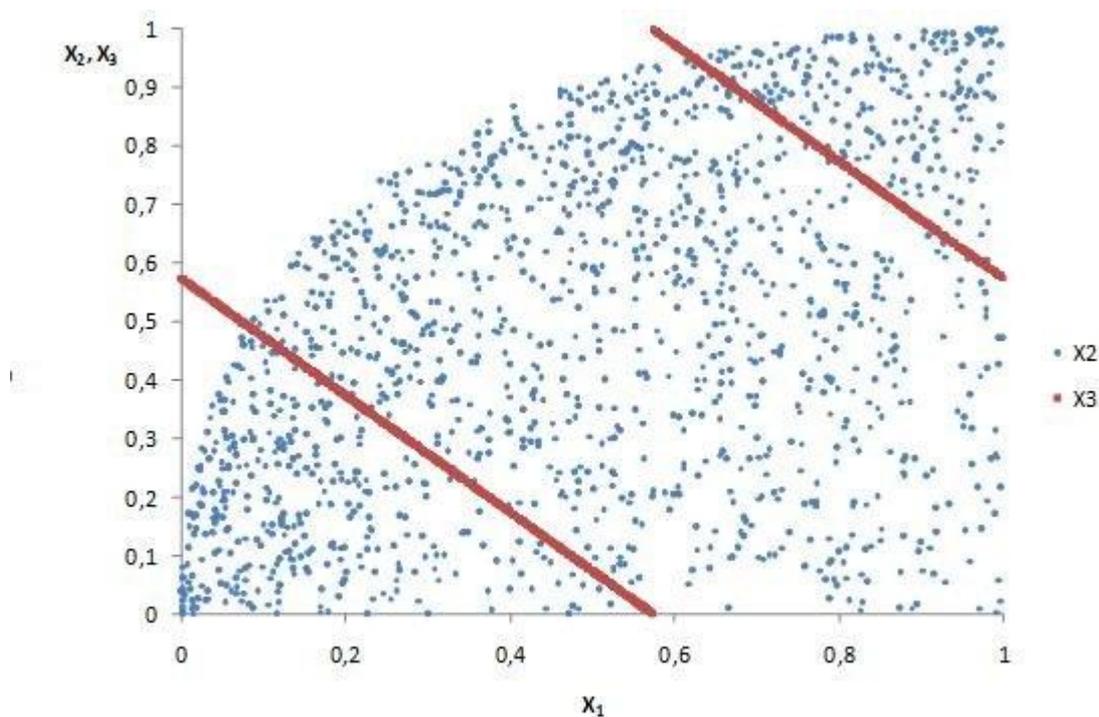
**Formel 2: Korrelationsmatrix**

Wie der Name dieses Abhängigkeitsmaßes bereits suggeriert, misst der lineare Korrelationskoeffizient die lineare stochastische Abhängigkeit zwischen den betreffenden Zufallsvariablen. Er nimmt Werte zwischen -1 und +1 an, d. h.  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq +1$ . Jedoch gilt nicht, dass perfekt positiv abhängige Zufallsvariablen notwendigerweise eine Korrelation von 1 besitzen und perfekt negativ abhängige Zufallsvariablen eine Korrelation von -1.<sup>3</sup> Stark abhängige Zufallsvariablen können auch eine Korrelation aufweisen, die betragsmäßig nahe bei Null liegt.

Dadurch dass nur lineare Abhängigkeit gemessen wird, werden Unterschiede in der Intensität der Abhängigkeit über die Ausprägungen der Zufallsvariablen nicht berücksichtigt. Da solche Unterschiede aber bei einer Vielzahl von Abhängigkeitsstrukturen auftreten, kann von einem identischen Korrelationskoeffizienten noch nicht auf eine identische Abhängigkeitsstruktur geschlossen werden. Die folgende Abbildung 1 zeigt dies deutlich: Obwohl zwischen den Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  derselbe lineare Korrelationskoeffizient besteht wie zwischen  $X_1$  und  $X_3$ , ist die Abhängigkeitsstruktur insgesamt eine völlig unterschiedliche.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (1999), S. 6. Dabei bedeutet perfekt (positiv oder negativ) abhängig, dass die Ausprägung einer Zufallsvariablen direkt mittels einer deterministischen Funktion aus der perfekt abhängigen Zufallsvariablen ermittelt werden kann. Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (1999), S. 4 f.

<sup>4</sup> Vgl. zu diesem Beispiel – insbesondere zur Konstruktion der Zufallsvariablen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  – Pfeifer, D. (2003), S. 677 f.



**Abbildung 1: Abhängigkeitsstruktur zwischen jeweils zwei Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  sowie  $X_1$  und  $X_3$**

Für unabhängige Zufallsvariablen ist die Kovarianz zwischen ihnen Null und somit auch der Korrelationskoeffizient. Zu beachten ist, dass die Umkehrung hiervon im Allgemeinen nicht gilt.<sup>5</sup> Ein betragsmäßig kleiner Korrelationskoeffizient impliziert somit auch nicht zwingenderweise geringe Abhängigkeit. So gibt es Beispiele von Zufallsvariablen, die sehr stark abhängig sind, aber dennoch eine Korrelation von fast Null haben.<sup>6</sup>

Als Abhängigkeitsmaß kann der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nur für die Klasse der elliptischen Verteilungen<sup>7</sup> eingesetzt werden. Sein Einsatz für nicht elliptische Verteilungen kann zu falschen Ergebnissen führen. Insbesondere die Abhängigkeit der Risiken bei extremen Ereignissen (d. h. hohen Verlusten) wird bei Anwendung des linearen Korrelationskoeffizienten stark unterschätzt, falls es sich um nicht elliptische Verteilungen handelt.<sup>8</sup>

Ein weiteres Defizit des linearen Korrelationskoeffizienten ist die Bedingung, dass die Varianzen der betrachteten Verteilungen endlich sein müssen, damit der lineare Korrelationskoeffizient definiert ist. Insbesondere bei der Modellierung von Großschäden kommen jedoch

<sup>5</sup> Vgl. *Mummenhoff, A.* (2007), S. 35.

<sup>6</sup> Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 24 f.

<sup>7</sup> Hierzu zählen beispielsweise die Normalverteilung sowie die Studentsche-t-Verteilung. Vgl. z. B. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 431.

<sup>8</sup> Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1254 f.

Verteilungen zum Einsatz, die diese Bedingung nicht erfüllen. Zudem ist die lineare Korrelation nicht invariant bzgl. streng monoton steigender nicht linearer Transformationen.<sup>9</sup> Dies ist beispielsweise dann ein Nachteil, wenn Schadenhöhen mittels einer nicht linearen Transformation in Schadenauszahlungen überführt werden sollen.

## 2.2 Spearman's Rangkorrelation und Kendall's $\tau$

Aufgrund der oben genannten Defizite des linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson sollen in diesem und im folgenden Abschnitt weitere Kennzahlen zur Messung der Abhängigkeit zwischen zwei Risiken vorgestellt werden. Die erste Kennzahl, Spearman's Rangkorrelation, ergibt sich für stetige Zufallsvariablen aus der Anwendung des linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson auf die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen:<sup>10</sup>

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y))$$

### Formel 3: Spearman's Rangkorrelation für zwei stetige Zufallsvariablen

Wie der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nimmt dieses Abhängigkeitsmaß ebenfalls Werte zwischen -1 und +1 an. Im Gegensatz dazu ist es aber invariant bzgl. streng monoton steigender linearer *und* nicht linearer Transformationen.<sup>11</sup> Außerdem kann nicht nur bei einem Wert des  $\rho_S$  von +1 direkt auf Komonotonität bzw. bei einem Wert von -1 auf Countermonotonität<sup>12</sup> geschlossen werden, sondern es gilt auch die Umkehrung hiervon, d. h. perfekt positiv abhängige Zufallsvariablen haben zwingenderweise eine Spearman's Rangkorrelation von +1 und perfekt negativ abhängige Zufallsvariablen eine Spearman's Rangkorrelation von -1.<sup>13</sup>

Eine weitere Kennzahl für die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen ergibt sich durch Kendall's Rangkorrelation, welche auch als Kendall's  $\tau$  bezeichnet wird. Hiernach müssen zum Messen der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  zunächst zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren  $(X_1, Y_1)$  und  $(X_2, Y_2)$  aufgestellt werden, wobei

<sup>9</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 7 f.

<sup>10</sup> Auch die Rangkorrelation nach Spearman kann für mehr als zwei abhängige Zufallsvariablen bestimmt werden. Dies geschieht analog zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson durch Aufstellen einer Matrix. Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 16.

<sup>11</sup> Vgl. Denuit, M. et al. (2005), S. 259.

<sup>12</sup> Dabei bedeutet Komonotonität, dass die Zufallsvariablen perfekt positiv abhängig sind, und Countermonotonität, dass die Zufallsvariablen perfekt negativ abhängig sind. Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (1999), S. 4.

<sup>13</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 16.

$X_1$  und  $X_2$  wie  $X$  und  $Y_1$  und  $Y_2$  wie  $Y$  verteilt sind. Anschließend werden folgende Berechnungen angestellt:<sup>14</sup>

$$\tau(X, Y) = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

**Formel 4: Kendall's  $\tau$**

Wiederum gilt ein Wertebereich von  $[-1, 1]$  für das Abhängigkeitsmaß. Und auch Kendall's  $\tau$  ist invariant bzgl. streng monoton steigender linearer *und* nicht linearer Transformationen.<sup>15</sup> Zudem gilt, dass perfekte positive Abhängigkeit einen Wert von  $+1$  für Kendall's  $\tau$  und perfekte negative Abhängigkeit einen Wert von  $-1$  für Kendall's  $\tau$  zur Folge hat, sowie die Umkehrung hiervon.<sup>16</sup>

### 2.3 Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden

Schließlich soll noch ein weiteres Abhängigkeitsmaß für Risiken betrachtet werden. Das Besondere an diesem ist, dass es auf die Abhängigkeiten in den Verteilungsenden fokussiert. Dies ist insbesondere für Schadenversicherer bei der Modellierung von Extremereignissen von zentraler Bedeutung. Das Maß für die Abhängigkeit im oberen Verteilungsende zwischen zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  kann wie folgt definiert werden:

$$\lambda(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{-1}(\alpha) \mid X > F_X^{-1}(\alpha)),$$

unter der Bedingung, dass ein solcher Grenzwert existiert.

**Formel 5: Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden**

Gilt  $0 < \lambda(X, Y) \leq 1$ , so sagt man, die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien asymptotisch abhängig im oberen Verteilungsende, gilt hingegen  $\lambda(X, Y) = 0$ , so sagt man,  $X$  und  $Y$  seien asymptotisch unabhängig im oberen Verteilungsende. Da  $\alpha$  von links gegen Eins strebt, gibt dieses Maß die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Zufallsvariable einen hohen Wert realisiert unter der Bedingung, dass die zweite betrachtete Zufallsvariable ebenfalls einen hohen Wert realisiert. Dabei werden jedoch die Abhängigkeiten in den restlichen Teilen der gemeinsamen Verteilungsfunktion nicht berücksichtigt. Das macht deutlich, dass es auch diesem Abhängigkeits-

<sup>14</sup> Kendall's Rangkorrelation kann ebenfalls für mehr als zwei abhängige Zufallsvariablen bestimmt werden. Auch dies geschieht analog zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson durch Aufstellen einer Matrix. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002)*, S. 16.

<sup>15</sup> Vgl. *Denuit, M. et al. (2005)*, S. 254.

<sup>16</sup> Vgl. z. B. *Denuit, M. et al. (2005)*, S. 256 und *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002)*, S. 16.

maß nicht gelingt, vollständige Informationen über die Abhängigkeitsstruktur zwischen mehreren Zufallsvariablen zu liefern.<sup>17</sup>

### 3 Ermittlung von Abhängigkeiten mittels multivariater Verteilungen

Zur Erfassung der Stärke der Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen kann aber auch deren gemeinsame Verteilung ermittelt werden, falls diese existiert. Multivariate Verteilungen geben die Beziehung zwischen zwei Zufallsvariablen im Gegensatz zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson nämlich *vollständig* wieder.<sup>18</sup> Zunächst sollen deshalb allgemeine Charakteristika dieser multivariaten Verteilungen erläutert werden, bevor im Anschluss die Konstruktion dieser durch Copulae beschrieben wird. Schließlich sollen noch Ansätze zur empirischen Ermittlung von multivariaten Verteilungen und Copulae vorgestellt werden.

#### 3.1 Multivariate Verteilungen

Die gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen ist wie folgt definiert:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

**Formel 6: Gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen**

Eine gemeinsame Verteilung kann beispielsweise direkt aus bekannten Verteilungen der einzelnen Zufallsvariablen konstruiert werden. Besonders einfach ist dies bei einer multivariaten Normalverteilung<sup>19</sup>. Hierbei müssen nur die entsprechenden Randverteilungen sowie die Korrelationen zwischen den einzelnen Zufallsvariablen bekannt sein.<sup>20</sup> Umgekehrt ergeben sich als Randverteilungen einer multivariaten Normalverteilung wiederum univariate Normalverteilungen.<sup>21</sup> Abbildung 2 zeigt als Beispiel den Graph der Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung<sup>22</sup> mit den Parametern  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X = \sigma_Y = 1$  sowie der Korrelation  $\rho(X, Y) = 0,6$ .

<sup>17</sup> Die Berechnung dieses Maßes mit Formel 5 kann bei gewissen Typen von multivariaten Verteilungen schwierig werden. Für diesen Fall ist die Berechnung auch mittels einer alternativen Formel möglich. Vgl. dazu *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 18 f.

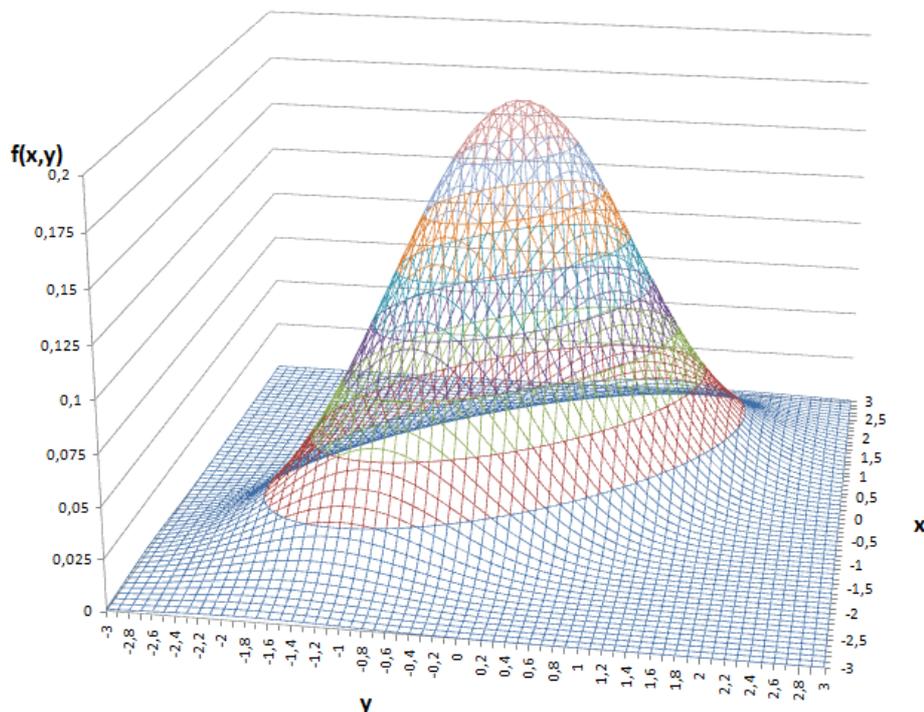
<sup>18</sup> Vgl. z. B. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 4 oder *Szegö, G.* (2002), S. 1256.

<sup>19</sup> Dabei ist unter einer multivariaten Normalverteilung die gemeinsame Verteilung mehrerer normalverteilter Zufallsvariablen zu sehen.

<sup>20</sup> Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 411 f.

<sup>21</sup> Vgl. *Cramer, E./Kamps, U.* (2008), S. 201.

<sup>22</sup> Entsprechend ist unter einer *bivariaten* Normalverteilung die gemeinsame Verteilung *zweier* normalverteilter Zufallsvariablen zu verstehen.



**Abbildung 2: Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung**

Ein Problem bei der Konstruktion der multivariaten Verteilung direkt aus den einzelnen Verteilungen liegt allerdings darin, dass dieser Ansatz nur angewendet werden kann, wenn sämtliche Randverteilungen zu derselben Familie von Verteilungen gehören. Außerdem muss für die Ermittlung der gemeinsamen Verteilung in vielen Fällen bereits ein Abhängigkeitsmaß zwischen den betreffenden Zufallsvariablen bekannt sein.

Um diesen Problemen auszuweichen, werden die Risiken meist als unabhängig voneinander angenommen. Gerechtfertigt wird eine solch vereinfachende Annahme häufig damit, dass Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken weit weniger Einfluss auf die Verteilung des Gesamtrisikos hätten als die Wahl der Verteilungen für die Einzelrisiken. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass ein geringer Einfluss von Abhängigkeiten auf das Gesamtrisiko tatsächlich nur dann gegeben ist, wenn die Verteilungen der Einzelrisiken durch geringe Varianzen gekennzeichnet sind und die Abhängigkeit zwischen den Einzelrisiken nicht hoch ist.<sup>23</sup> Gerade aber bei Extremereignissen, wie Naturkatastrophen oder Terroranschlägen, ist davon auszugehen, dass einzelne Risiken nicht unabhängig voneinander auftreten, sondern vielmehr signifikant positiv korrelieren. Somit kann das Ignorieren jeglicher Abhängigkeit zwischen Risiken dazu führen, dass das Gesamtrisiko eines Versicherungsunternehmens unterschätzt wird.

<sup>23</sup> Vgl. Bukowski, J./Korn, L./Wartenberg, D. (1995), S. 218.

Eine solche Unterschätzung kann für die Solvabilität eines Versicherers sehr gefährlich werden. Um Abhängigkeiten zwischen Risiken, denen verschiedene Typen von Verteilungsfunktionen zugrunde liegen, zu erfassen, wurden deshalb in der jüngeren Vergangenheit vermehrt Copulae in Betracht gezogen.<sup>24</sup> Mit diesen können verschiedenste multivariate Verteilungen konstruiert werden. Das Konzept der Copulae soll deshalb im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

### 3.2 Copulae

Das Konzept der Copulae basiert auf der Idee, die gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen in einen Teil zu zerlegen, der die Abhängigkeitsstruktur zwischen ihnen beschreibt, und in einen Teil (bzw. mehrere Teile), der die Randverteilungen der einzelnen Zufallsvariablen beschreibt. Die Copula wurde von dem Mathematiker *Sklar* definiert.<sup>25</sup> Der Begriff entstammt dem Lateinischen und bedeutet Bindemittel oder Band, bezeichnet in der Grammatik aber auch einen Ausdruck, der ein Subjekt mit einem Prädikat verbindet. Mit diesem Begriff soll also zum Ausdruck gebracht werden, dass die Copula eine Verbindung zwischen einer multivariaten Verteilungsfunktion und ihren jeweiligen eindimensionalen Randverteilungen herstellt.<sup>26</sup> Es handelt sich bei ihr selbst um eine multivariate Verteilungsfunktion mit auf dem Intervall  $[0,1]$  gleichverteilten Randverteilungen, die folgendermaßen definiert ist:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n),$$

wobei  $C(\cdot)$  die Copula,

$(U_1, \dots, U_n)^T$  mit  $U_i \sim U(0,1)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ein Zufallsvektor  
und  $(u_1, \dots, u_n)^T \in [0,1]^n$  Realisationen von  $(U_1, \dots, U_n)^T$  darstellen.

#### Formel 7: Copula

Alternativ wird eine Copula als beliebige Funktion  $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  mit den folgenden drei Eigenschaften definiert:

1.  $C(u_1, \dots, u_n)$  wächst in jeder Komponente  $u_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u_i \in [0,1]$ .

<sup>24</sup> Vgl. z. B. *Ané, T./Kharoubi, C. (2003), Di Clemente, A./Romano, C. (2004), S. 326, Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), Faivre, F. (2003), Pfeifer, D. (2003), sowie Tang, A./Valdez, E. A. (2006).*

<sup>25</sup> Vgl. *Sklar, M. (1959).*

<sup>26</sup> Vgl. *Mummenhoff, A. (2007), S. 38.*

3. Für alle  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$  mit  $a_i \leq b_i$  gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) \geq 0,$$

wobei  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Es kann gezeigt werden, dass diese Definition und die Definition aus Formel 7 äquivalent sind.<sup>27</sup>

Die Risikomodellierung erfolgt beim Copula-Ansatz in zwei Schritten. In einem ersten Schritt werden die Randverteilungen für alle Risikokomponenten ermittelt. Sobald man sämtliche Randverteilungen bestimmt hat, wird im zweiten Schritt die gemeinsame Verteilung aller Risikokomponenten mit Hilfe der oben vorgestellten Copula-Funktion, welche die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelrisiken widerspiegelt, ermittelt.<sup>28</sup> Dies geschieht, indem zunächst alle  $n$  Einzelrisiken  $X_i$  mittels ihrer Randverteilungsfunktion  $F_i$  jeweils in eine auf dem Intervall  $[0,1]$  stetig gleichverteilte Zufallsgröße  $U_i$  transformiert werden:

$$U_i = F_i(X_i)$$

**Formel 8: Transformation beliebig verteilter Einzelrisiken in auf  $[0,1]$  stetig gleichverteilte Zufallsgrößen**

Werden nun diese transformierten Zufallsgrößen  $U_i$  in die Copula-Funktion eingesetzt, erhält man die multivariate gemeinsame Verteilungsfunktion aller Einzelrisiken  $X_i$ :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(u_1, \dots, u_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

**Formel 9: multivariate gemeinsame Verteilungsfunktion aus Copula**

Es kann auch das Umgekehrte gezeigt werden, nämlich dass jede multivariate Verteilungsfunktion mit Hilfe einer Copula aus ihren Randverteilungsfunktionen zusammengesetzt werden kann. Für den Fall, dass alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, kann sogar gezeigt werden, dass die Copula eindeutig bestimmt ist.<sup>29</sup> Wenn zudem alle  $F_i$  und die Copula  $C$  differenzierbar sind, kann die gemeinsame Dichte bestimmt werden zu:

<sup>27</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 4.

<sup>28</sup> Vgl. Junker, M./May, A. (2005), S. 428.

<sup>29</sup> Vgl. Sklar, M. (1959), S. 229 sowie auch Ané, T./Kharoubi, C. (2003), S. 413 f. und Nelsen, R. B. (2006), S. 18.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) * \dots * f_n(x_n) * c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

wobei  $f_i(x_i)$  jeweils die Dichte zur Verteilungsfunktion  $F_i$

und  $c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$  die Dichte der Copula ist.

**Formel 10: Dichtefunktion der multivariaten gemeinsamen Verteilungsfunktion aus Copula**

Der Wertebereich von Copulae wird dabei durch die sog. Fréchet-Schranken begrenzt.<sup>30</sup>

Somit kann aus gewählten Randverteilungen und einer Copula, die Informationen über die Abhängigkeitsstrukturen der einzelnen Variablen enthält, eine multivariate Verteilungsfunktion hergeleitet werden. Umgekehrt kann aber auch aus den Inversen der Randverteilungen und einer multivariaten Verteilungsfunktion eine Copula hergeleitet werden.<sup>31</sup>

Im Folgenden sollen einige bedeutende Familien von Copulae genannt und erläutert werden. Im Einzelnen sind dies:

- die elliptischen Copulae mit
  - den Gaußschen Copulae sowie
  - den Studentschen Copulae und
- die archimedischen Copulae mit
  - den Gumbel Copulae,
  - den Cook-Johnson Copulae sowie
  - den Frank Copulae

Die Copulatypen unterscheiden sich v. a. darin, dass die Bereiche der Wahrscheinlichkeitsfunktion, in denen die Abhängigkeit stärker und schwächer ist, verschieden sind.<sup>32</sup> Die Gaußschen Copulae werden auch als Normal Copulae bezeichnet. Der Grund hierfür liegt darin, dass man bei Anwendung dieser Copulae und Wahl von Standardnormalverteilungen für die Randverteilungen als Ergebnis multivariate Normalverteilungen erhält. Die Familie der Gaußschen Copulae kann allgemein wie folgt dargestellt werden:

$$C_{\rho}^{Gau}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\rho}^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

<sup>30</sup> Vgl. zu diesen z. B. *Faivre, F.* (2003), S. 3 f. sowie *Sklar, M.* (1959), S. 230.

<sup>31</sup> Vgl. z. B. *Faivre, F.* (2003), S. 5 sowie *Mummenhoff, A.* (2007), S. 38 f.

<sup>32</sup> Vgl. *Venter, G. G.* (2002), S. 68.

wobei  $\Phi_\rho^n$  die Verteilungsfunktion der  $n$ -variaten Standardnormalverteilung mit Korrelation  $\rho$  und  $\Phi^{-1}$  die Inverse der Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung ist.

**Formel 11: Gaußsche Copulae**

Eine bedeutende Eigenschaft der Gaußschen Copulae ist die gegen Null strebende Abhängigkeit in ihren Verteilungsenden.<sup>33</sup> Dies bedeutet, dass die einzelnen Zufallsvariablen der gemeinsamen Verteilung gerade bei hohen Realisationen quasi unabhängig sind, selbst wenn insgesamt eine hohe Korrelation zwischen ihnen herrscht. Im Gegensatz dazu weisen die Studentschen Copulae den Nachteil – zumindest für die Modellierung gewisser Risiken in Versicherungsunternehmen – der asymptotischen Unabhängigkeit in den Verteilungsenden nicht auf.<sup>34</sup>

Dies wird auch in Abbildung 3 und Abbildung 4 deutlich, die Graphen der Dichten beider Klassen von Copulae darstellen.<sup>35</sup> Formel 12 zeigt, wie die Familie der Studentschen Copulae definiert ist:

$$C_{v,\rho}^{Stu}(u_1, \dots, u_n) = t_{v,\rho}^n(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)),$$

wobei  $v$  die Anzahl der Freiheitsgrade,

$t_{v,\rho}^n$  die Verteilungsfunktion der  $n$ -variaten Studentschen-t-Verteilung

mit  $v$  Freiheitsgraden und Korrelation  $\rho$  sowie

$t_v^{-1}$  die Inverse der Verteilungsfunktion der univariaten

Studentschen-t-Verteilung mit  $v$  Freiheitsgraden ist.

**Formel 12: Studentsche Copulae**

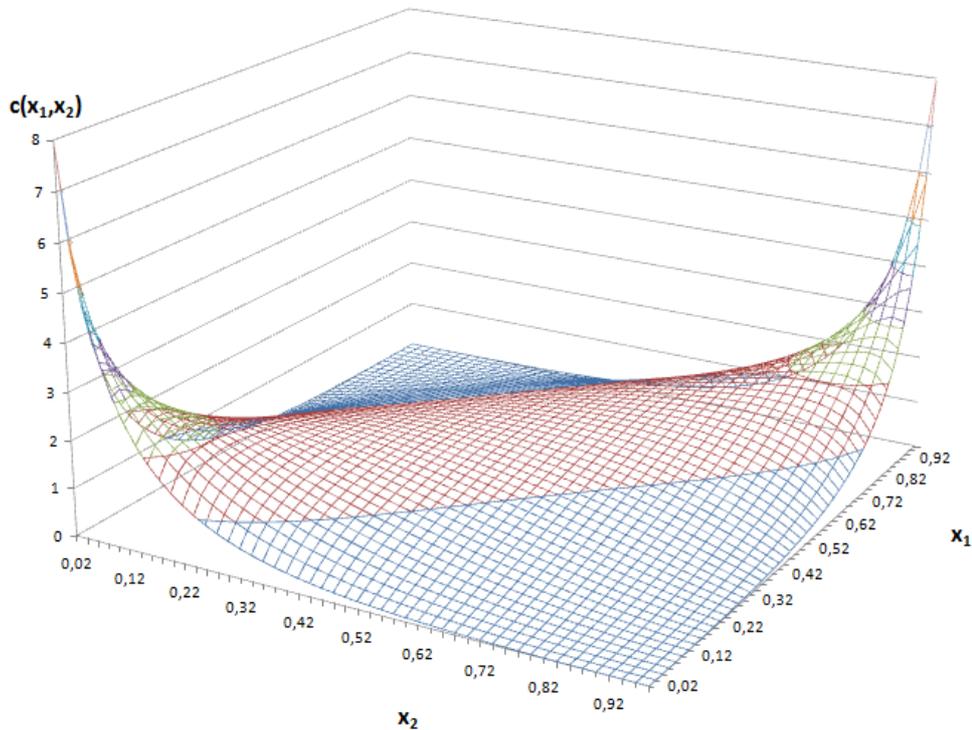
Für den bivariaten Fall gilt: Solange die Korrelation  $\rho$  größer ist als minus Eins, weisen diese Copulae asymptotische Abhängigkeit im oberen Verteilungsende auf, auch wenn  $\rho$  Null oder sogar negativ ist. Die Stärke der Abhängigkeit in den Verteilungsenden nimmt dabei mit sin-

<sup>33</sup> Vgl. z. B. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 19 sowie Tang, A./Valdez, E. A. (2006), S. 6. Dies gilt nicht für den Fall, dass die Korrelation genau Eins oder minus Eins beträgt.

<sup>34</sup> Vgl. z. B. Faivre, F. (2003), S. 6 oder Tang, A./Valdez, E. A. (2006), S. 6.

<sup>35</sup> Noch deutlich anschaulicher wird die asymptotische Unabhängigkeit bei den Normal Copulae aber, wenn als Randverteilungen Standardnormalverteilungen gewählt werden, sodass sich die multivariate Normalverteilung ergibt. Vgl. Abbildung 2.

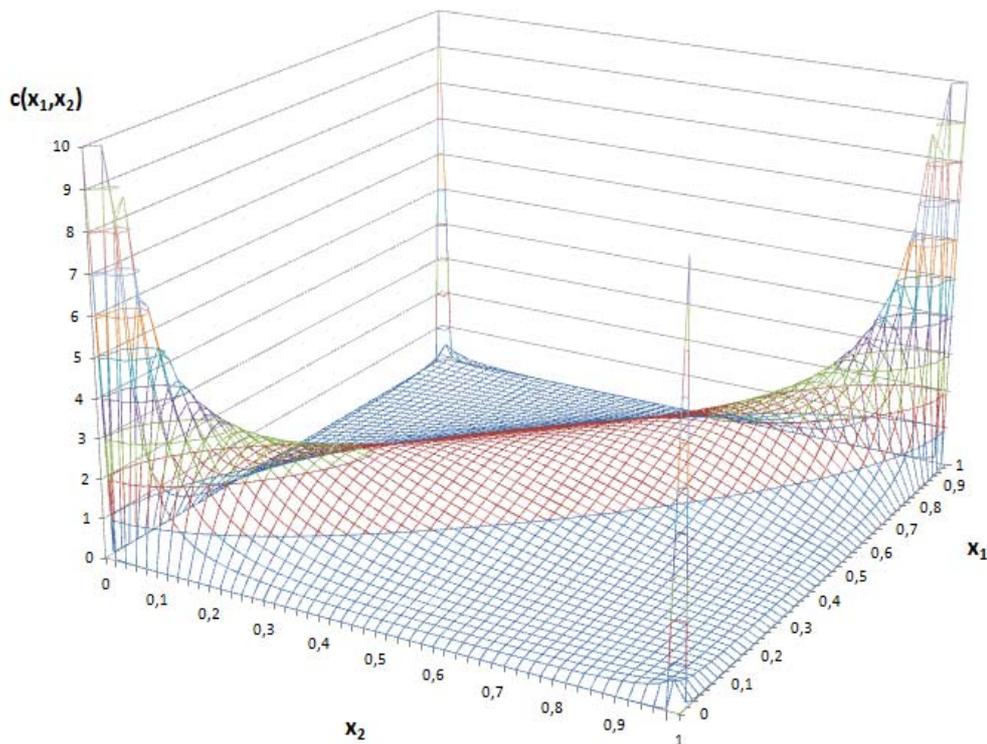
kender Anzahl von Freiheitsgraden  $\nu$  und steigender Korrelation  $\rho$  zu.<sup>36</sup> Bei Wahl einer Gleichverteilung über dem Intervall  $(0,1)$  als Randverteilung<sup>37</sup> ergeben sich folgende Graphen für die Dichten einer bivariaten Gaußschen und einer bivariaten Studentschen Copula:



**Abbildung 3: Dichte einer Gaußschen Copula mit einem Korrelationskoeffizient  $\rho$  von 0,7**

<sup>36</sup> Wird als Freiheitsgrad  $\nu = 1$  gewählt, spricht man von Cauchy Copulae. Vgl. *Tang, A./Valdez, E. A. (2006), S. 6.*

<sup>37</sup> In diesem Fall gilt  $x_1 = u_1$  und  $x_2 = u_2$ , d.h. die Abbildungen können zum einen als die Graphen der Ableitung der Copula  $c(u)$  interpretiert werden, gleichzeitig aber auch als Graphen von Dichten multivariater Verteilungen  $f(x)$  mit Copula  $C$  und auf  $(0,1)$  gleichverteilten Rändern.



**Abbildung 4: Dichte einer Studentschen Copula mit einem Korrelationskoeffizient  $\rho$  von 0,7 und  $\nu = 2$**

Eine weitere Klasse von Copulae ist durch die archimedischen Copulae gegeben. Ihr gehören u. a. die Gumbel Copulae an. Obwohl die Gumbel Copulae zu einer anderen Klasse gehören als die Studentschen Copulae, weisen auch sie die Eigenschaft einer hohen Abhängigkeit im Verteilungsende auf, allerdings nicht wie die Studentschen Copulae in beiden Verteilungsenden, sondern nur im oberen (vgl. Abbildung 5).<sup>38</sup> Im unteren Verteilungsende weisen die Gumbel Copulae dagegen immer asymptotische Unabhängigkeit auf. Auch sie sind deshalb zur Modellierung von Extremereignissen geeignet. Insgesamt passen sie i. d. R. sogar noch besser zu den empirischen Schadenbeobachtungen: Zum einen können damit Schäden aus Stressszenarien<sup>39</sup>, zwischen denen häufig Abhängigkeiten vorhanden sind, adäquat erfasst werden, zum anderen aber auch gewöhnliche Schäden (geringerer Höhe), die meist unabhängig voneinander auftreten. Formel 13 zeigt die Definition der Gumbel Copulae:

$$C_{\beta}^{Gum}(u_1, \dots, u_n) = e^{-(\sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}},$$

mit  $\beta \geq 1$  als Strukturparameter.

**Formel 13: Gumbel Copulae**

<sup>38</sup> Damit sind diese Copulae asymmetrisch. Vgl. *Faivre, F.* (2003), S. 6 sowie *Venter, G. G.* (2002), S. 72.

<sup>39</sup> Damit sind Szenarien mit extrem hohen und ungünstigen Abweichungen von der jeweils erwarteten Entwicklung gemeint. Vgl. *Zwiesler, H.-J.* (2005), S. 125 f.

Wird als Strukturparameter Eins gewählt, so erhält man die multivariate Verteilung unabhängiger Zufallsvariablen. Nur in diesem Fall weisen die Gumbel Copulae auch keine asymptotische Abhängigkeit im oberen Verteilungsende auf. Allgemein können mit einer Gumbel Copula nur Abhängigkeitsstrukturen von Unabhängigkeit oder *positiver* Abhängigkeit dargestellt werden.<sup>40</sup>

Eine weitere Copulaefamilie aus der Klasse der archimedischen Copulae stellen die Cook-Johnson Copulae dar.<sup>41</sup> Konträr zu den Gumbel Copulae weisen sie gerade im unteren Verteilungsende asymptotische Abhängigkeit auf und im oberen Verteilungsende asymptotische Unabhängigkeit (vgl. Abbildung 6). Sie eignen sich daher z. B. besonders zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Aktienindexrenditen.<sup>42</sup> Formal können sie wie folgt dargestellt werden:

$$C_{\beta}^{C-J}(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\beta} + \dots + u_n^{-\beta} - n + 1)^{\frac{1}{\beta}},$$

mit  $\beta > 0$  als Strukturparameter.

**Formel 14: Cook-Johnson Copulae**

Schließlich soll noch eine Copulafamilie vorgestellt werden, die ebenfalls zu den archimedischen Copulae gehört, jedoch weder im oberen noch im unteren Verteilungsende asymptotische Abhängigkeit aufweist. Sie bildet daher eine ähnliche Abhängigkeitsstruktur wie die Familie der Normal Copulae ab, allerdings mit dem Unterschied dass sie in den Verteilungsenden noch weniger Abhängigkeit aufweist (vgl. Abbildung 7). Es handelt sich hierbei um die Frank Copulae.<sup>43</sup> Folgende Formel 15 zeigt, wie sie definiert ist:

$$C_{\beta}^{Fra}(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\beta u_1} - 1) \dots (e^{-\beta u_n} - 1)}{(e^{-\beta} - 1)^{n-1}}\right),$$

mit  $\beta > 0$  als Strukturparameter.

**Formel 15: Frank Copulae**

Auch für die drei Familien archimedischer Copulae sollen im Folgenden jeweils bivariate Vertreter durch die Graphen ihrer Dichte visuell dargestellt werden.

<sup>40</sup> Vgl. *Faivre, F.* (2003), S. 6.

<sup>41</sup> Die Cook-Johnson Copulae werden in der Literatur auch als Pareto Copulae und Clayton Copulae bezeichnet. Vgl. *Nelsen, R. B.* (2006), S. 118 sowie *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), S. 6.

<sup>42</sup> Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 429.

<sup>43</sup> Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 417, *Junker, M./May, A.* (2005), S. 432 sowie *Venter, G. G.* (2002), S. 84 f.

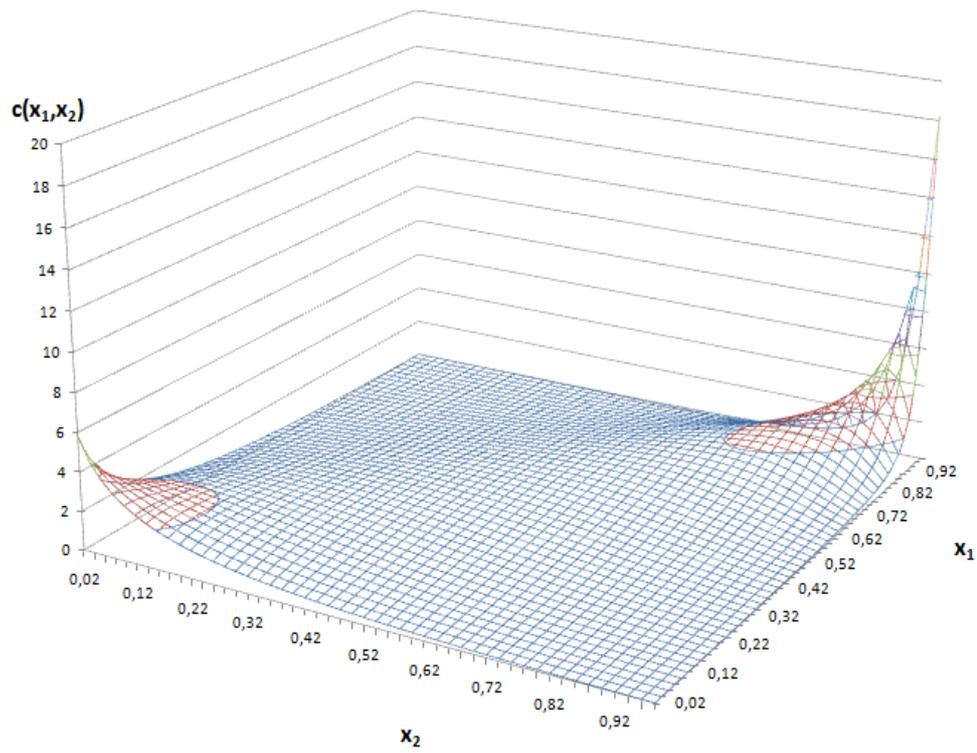


Abbildung 5: Gumbel Copula mit Strukturparameter  $\beta = 2$

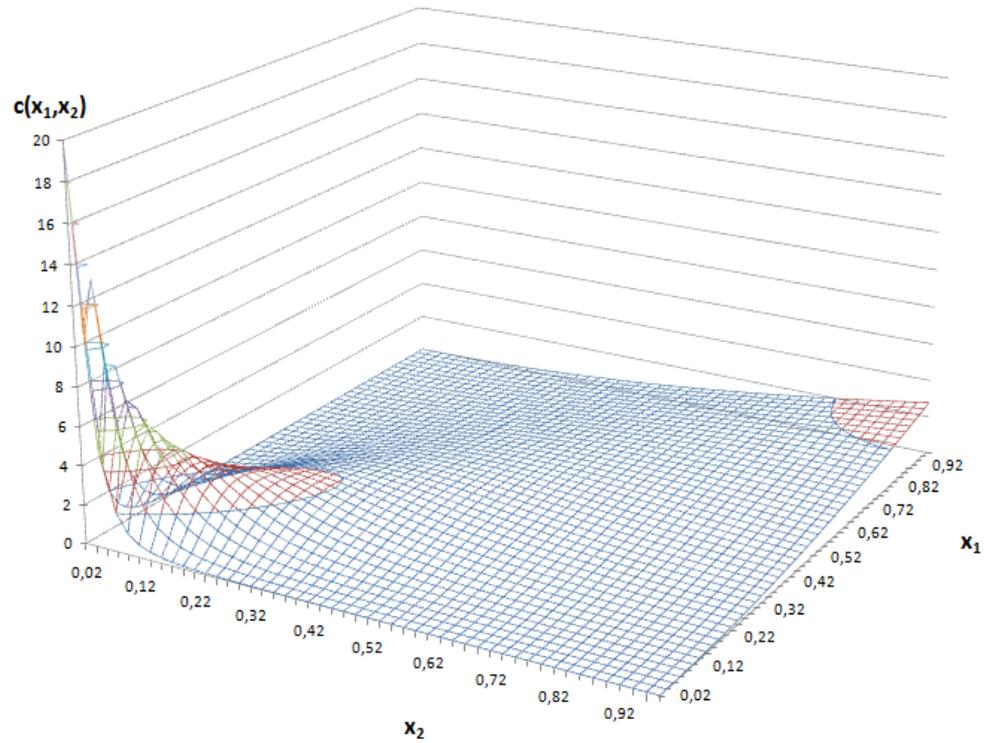


Abbildung 6: Cook-Johnson Copula mit Strukturparameter  $\beta = 2$

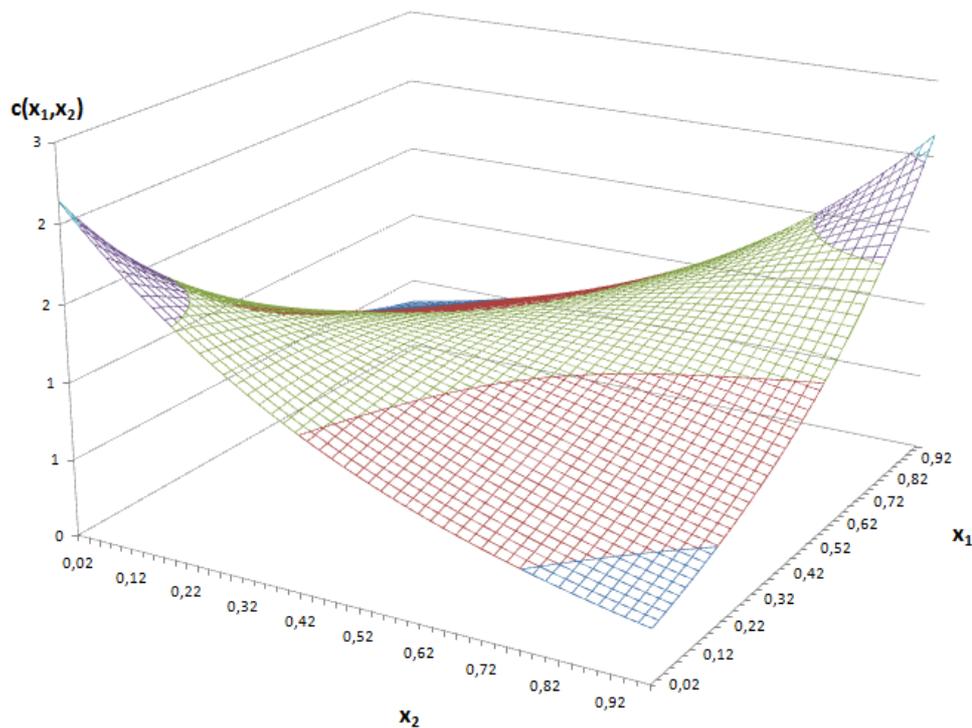


Abbildung 7: Frank Copula mit Strukturparameter  $\beta = 2$

### 3.3 Ermittlung von Copulae und multivariaten Verteilungen

Um das Konzept der Copula zur Abbildung der Abhängigkeiten zwischen Risiken in einem Versicherungsunternehmen anwenden zu können, müssen zunächst die entsprechenden Copulae identifiziert werden. Hierzu stehen zwei alternative Methoden zur Verfügung: parametrische und nicht-parametrische Vorgehensweisen. Bei ersteren wird der Copulatyp im Voraus festgelegt.<sup>44</sup> Aus den vorigen Ausführungen wird schnell klar, dass die verschiedenen Copulatyphen jeweils spezifische Eigenschaften besitzen, mit denen unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen beschrieben werden können. Es muss also ein Copulatyp ausgewählt werden, dessen Eigenschaften sich möglichst gut für die Beschreibung der jeweiligen Abhängigkeitsstruktur eignen. Dies kann z. B. über die Anwendung eines bestimmten Verfahrens geschehen, mit dem ermittelt wird, welcher Typ archimedischer Copulae am besten zu beobachteten Daten passt.<sup>45</sup>

Wenn dies geschehen ist, gilt es aber noch die Parameter der Copula so anzupassen, dass die Abhängigkeitsstrukturen möglichst so, wie sie in der Realität beobachtet wurden, abgebildet werden. Dies kann durch Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode zusammen mit der

<sup>44</sup> Vgl. Szegő, G. (2002), S. 1268.

<sup>45</sup> Vgl. Frees, E. W./Valdez, E. A. (1998), S. 9 f. und zu dem Verfahren im Speziellen Genest, C./Rivest, L.-P. (1993).

Abschätzung der Parameter für die Randverteilungen geschehen.<sup>46</sup> Der Vorteil der Anwendung von Copulae liegt aber gerade in der Trennung der Abschätzung der Randverteilungen und der Abschätzung der Abhängigkeitsstruktur. Alternativ ist deshalb auch ein Vorgehen in zwei Schritten – zunächst werden die Parameter der Randverteilungen geschätzt und anschließend die der Copula – möglich.<sup>47</sup>

Im Gegensatz dazu wird beim nicht-parametrischen Ansatz aus den vorhandenen Daten eine empirische Copula bestimmt ohne a priori einen bestimmten Copulatypp festzulegen.<sup>48</sup> Wie die tatsächliche multivariate Verteilungsfunktion durch die tatsächliche Copula und die tatsächlichen Randverteilungen festgelegt ist, so ist auch die empirische multivariate Verteilungsfunktion durch die empirische Copula und die empirischen Randverteilungen festgelegt. Zudem gilt, dass mit zunehmendem Umfang der Daten die empirische Copula gegen die tatsächliche Copula konvergiert.<sup>49</sup>

Insgesamt muss bei der multivariaten Modellierung prinzipiell ähnlichen Anforderungen wie bei der univariaten Modellierung genügt werden.<sup>50</sup> Im Unterschied zur Modellierung univariater Verteilungen konnten allerdings bei der Modellierung multivariater Verteilungen erst sehr wenige Erfahrungen gesammelt werden. Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass die Abschätzung einer adäquaten Copula stark von den bereits im Voraus zu bestimmenden Randverteilungen abhängt.<sup>51</sup> Bei einer parametrischen Vorgehensweise könnte dieses aber z. B. dadurch teilweise behoben werden, dass zu einem sog. semi-parametrischen Ansatz übergegangen wird. Dabei wird die Copula selbst über einen parametrischen Ansatz angepasst, dazu werden jedoch nicht-parametrische, empirische Randverteilungsfunktionen verwendet.<sup>52</sup>

## 4 Beurteilung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden zwei völlig verschiedene Konzepte zur Darstellung der Abhängigkeiten zwischen Risiken beschrieben. Während die zuerst vorgestellten Abhängigkeitsmaße Abhängigkeiten zwischen Risiken anhand von nur einer einzelnen Kennzahl beschreiben (bzw. anhand einer Matrix von Kennzahlen bei Dimensionen, die größer

<sup>46</sup> Vgl. hierzu *Frees, E. W./Valdez, E. A.* (1998), S. 14 f.

<sup>47</sup> Vgl. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 437.

<sup>48</sup> Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1268.

<sup>49</sup> Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 425.

<sup>50</sup> Vgl. *Pfeifer, D.* (2003), S. 681.

<sup>51</sup> Vgl. *Pfeifer, D.* (2003), S. 681.

<sup>52</sup> Vgl. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 437. In *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 424-431 wird z. B. auf diese Weise eine bestimmte Cook-Johnson Copula als die parametrische Copula identifiziert, die die Abhängigkeiten zwischen den Renditen verschiedener Aktienindizes am besten darstellen kann.

sind als zwei), können durch Copulae multivariate Verteilungen konstruiert werden, die die gesamte Abhängigkeitsstruktur vollständig erfassen. Beide Konzepte sollen im Folgenden beurteilt werden. Zunächst werden jedoch noch einige Kriterien dargestellt, denen spezielle Abhängigkeitsmaße gerecht werden sollten.

#### 4.1 Wünschenswerte Eigenschaften für Abhängigkeitsmaße

Die beschriebenen Abhängigkeitsmaße sollen anhand der Erfüllung von fünf Eigenschaften beurteilt werden, die bei einem Maß für die Abhängigkeit zwischen Risiken wünschenswert sind. Dazu sollen diese Eigenschaften zunächst genannt und erläutert werden. Es sei  $\delta(\cdot)$  ein Abhängigkeitsmaß, dann können die Eigenschaften wie folgt beschrieben werden:<sup>53</sup>

1. Symmetrie:  $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$
2. Normierung:  $-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$
3. Schluss von und auf Ko- bzw. Countermonotonität:
  - a.  $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X,Y$  sind komonoton
  - b.  $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X,Y$  sind countermonoton
4. Invarianz bzgl. streng monotoner Transformationen: Für eine auf dem Wertebereich von  $X$  streng monotone Transformation  $T: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  folgt:
  - a.  $\delta(T(X),Y) = \delta(X,Y)$ , falls  $T$  streng monoton steigend ist
  - b.  $\delta(T(X),Y) = -\delta(X,Y)$ , falls  $T$  streng monoton fallend ist
5. Schluss von und auf Unabhängigkeit:
 
$$\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X,Y \text{ sind unabhängig}$$

Allerdings kann ein Abhängigkeitsmaß niemals all diese fünf Eigenschaften gleichzeitig besitzen, da die vierte Eigenschaft die fünfte Eigenschaft ausschließt und umgekehrt.<sup>54</sup>

Die erste Eigenschaft ist für ein Abhängigkeitsmaß wünschenswert, weil ansonsten die Stärke der Abhängigkeit von der Reihenfolge der betrachteten Risiken nicht unabhängig wäre. Die Erfüllung des zweiten Kriteriums macht die Abhängigkeit zwischen verschiedenen Paaren von Zufallsvariablen vergleichbar, da dann ein einheitlicher Maßstab für die Abhängigkeit gilt. Ein Schluss von und auf Ko- bzw. Countermonotonität ermöglicht das sofortige Erkennen stark abhängiger Zufallsvariablen. Gilt (wie z. B. beim linearen Korrelationskoeffizienten

<sup>53</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 15.

<sup>54</sup> Zum Beweis hierfür vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 15.

nach Pearson) nicht, dass bei perfekt abhängigen Zufallsvariablen das Maß zwingend einen Betrag von Eins annimmt, so kann eine starke Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen evtl. nicht direkt erkannt werden.

Die Invarianz bzgl. streng monotoner Transformationen ist v. a. für praktische Anwendungen wichtig. Wird eine stochastische Größe  $X$  mittels einer deterministischen streng monotonen Funktion  $T$  in eine andere, davon abhängige Größe  $T(X)$  transformiert, so ist die Abhängigkeitsstruktur zwischen  $X$  und einer zweiten stochastischen Größe  $Y$  dieselbe wie zwischen  $T(X)$  und  $Y$ . Deshalb sollte auch das Abhängigkeitsmaß jeweils denselben Wert annehmen. Die fünfte Eigenschaft ist für ein Abhängigkeitsmaß wichtig, damit die Unabhängigkeit zwischen Risiken erkannt werden kann. Gilt (wie ebenfalls beim linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson), dass bei einem Betrag des Abhängigkeitsmaßes von Null nicht auf Unabhängigkeit geschlossen werden kann und umgekehrt, so kann eine möglicherweise bestehende Unabhängigkeit von Risiken (zumindest mit dem Abhängigkeitsmaß) nicht identifiziert werden.

## 4.2 Beurteilung der vorgestellten Konzepte

Zunächst sollen die Abhängigkeitsmaße betrachtet werden. Das bekannteste Maß, der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, besitzt lediglich die ersten beiden der im vorigen Abschnitt vorgestellten wünschenswerten Eigenschaften.<sup>55</sup> Er ist daher Spearman's Rangkorrelation und Kendall's  $\tau$  unterlegen. Diese besitzen nämlich die ersten vier der genannten wünschenswerten Eigenschaften. Zudem ist der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nur bei Vorliegen endlicher Varianzen definiert. Im Gegensatz zum Pearsonschen Korrelationskoeffizienten messen Spearman's Rangkorrelation und Kendall's  $\tau$  außerdem nicht nur die lineare Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen, sondern allgemein die monotone Abhängigkeit.<sup>56</sup> Ihre Berechnung ist in manchen Fällen schwieriger, in manchen Fällen aber auch einfacher als die des linearen Korrelationskoeffizienten.<sup>57</sup>

Das in Abschnitt 2.3 vorgestellte Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden kann nicht mit dem linearen Korrelationskoeffizienten oder den Rangkorrelationsmaßen verglichen werden, da es nur auf die Abhängigkeit in den Verteilungsenden fokussiert. Es ist also dann vorzuziehen und anzuwenden, wenn die jeweilige Fragestellung eine solche Betrachtung er-

<sup>55</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 15.

<sup>56</sup> Vgl. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), S. 16.

<sup>57</sup> Arbeitet man beispielsweise mit multivariaten Normalverteilungen oder multivariaten Studentischen Verteilungen ist die Berechnung des momentenbasierten linearen Korrelationskoeffizienten einfacher. Liegen jedoch Verteilungen vor, deren Abhängigkeit durch z. B. eine Gumbel Copula repräsentiert wird, kann dafür die Berechnung der Rangkorrelationsmaße einfacher sein.

fordert. Wie bereits erwähnt, ist dies v. a. dann der Fall, wenn es um die Modellierung von Extremereignissen geht. Eine Beurteilung anhand der Erfüllung der oben dargestellten wünschenswerten Eigenschaften erscheint vor diesem Hintergrund nicht sinnvoll.

Mit Hilfe von Copulae können jedoch multivariate Verteilungen konstruiert werden, die Abhängigkeitsstrukturen voll und ganz abbilden. Somit ermöglichen sie auch die vollständige Information über Risiken und ihre Abhängigkeit in einem Versicherungsunternehmen, wohingegen bei der Verwendung von Abhängigkeitsmaßen die Abhängigkeitsstruktur auf eine einzelne Kennzahl reduziert wird und somit wichtige Informationen verloren gehen können. Dies wird auch aus der Tatsache deutlich, dass zwar aus der Copula die Korrelation bestimmt werden kann, jedoch kann aus der Korrelation i. A. nicht die Copula bestimmt werden. Gerade bei Abhängigkeiten, die nicht linear sind, sondern sich zum größten Teil in den Verteilungsenden wiederfinden, kann es so zu einer deutlichen Unterschätzung des Risikos kommen.

Technisch gesehen bieten Copulae den Vorteil, dass die Randverteilungen und somit die Einzelrisiken zunächst separat unter Berücksichtigung der jeweiligen Gegebenheiten modelliert werden können und die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelrisiken unabhängig davon ermittelt werden kann. Zudem sind Copulae – wie auch die Rangkorrelationsmaße – invariant gegen sämtliche monotone Transformationen.<sup>58</sup> Gegenüber der direkten Modellierung multivariater Verteilungen aus Randverteilungen haben Copulae zudem den Vorteil, dass sie unabhängig vom Typ der Randverteilungen angewendet werden können, d. h. aus einzelnen Randverteilungen kann mit den Copulae auch dann eine multivariate Verteilung konstruiert werden, wenn die Randverteilungen nicht alle zu derselben Familie gehören und nicht bereits ein Abhängigkeitsmaß zwischen ihnen ermittelt wurde.

In Bezug auf die Qualität der Ergebnisse der Abschätzung von Abhängigkeiten ist somit das Konzept der Copulae dem Konzept der Abhängigkeitsmaße eindeutig überlegen. Vorteile weisen die Abhängigkeitsmaße lediglich in der praktischen Anwendung auf, da sie wesentlich einfacher ermittelbar sind, dabei weniger Aufwand betrieben werden muss und wesentlich mehr Erfahrung vorhanden ist. Wird die Anwendung von Copulae jedoch weiter verbreitet, so ist davon auszugehen, dass sich diese Probleme in Zukunft reduzieren werden.

Weitere Defizite des Konzeptes der Copulae ergeben sich aus der Tatsache, dass Copulae wohl die Abhängigkeitsstruktur vollständig abbilden, jedoch nicht bei der Untersuchung von Ursache-Wirkungszusammenhängen helfen können, da durch sie nicht erkennbar wird, ob

---

<sup>58</sup> Vgl. Pfeifer, D. (2003), S. 679.

mehrere Zufallsvariablen gleichermaßen voneinander abhängen oder ob nur eine Zufallsvariable auf eine andere wirkt, ohne dass die Umkehrung hiervon gilt. Als Problem im Zusammenhang mit Copulae werden außerdem die hohen Mengen an Daten genannt, die bei der Modellierung – insbesondere von komplexen Copulae – notwendig sind. Gerade in den Verteilungsenden, d. h. auch für Extremereignisse, sind diese aber knapp.

Insgesamt kann man aber zu dem Schluss kommen, dass zur Beschreibung der Abhängigkeitsstrukturen zwischen einzelnen Risiken in einem Versicherungsunternehmen, wenn möglich, Copulae angewendet werden sollten, da Kennzahlen Abhängigkeitsstrukturen nicht vollumfänglich wiedergeben können, somit weit weniger Informationen liefern und es schließlich zu einer Unterschätzung des tatsächlich vorhandenen Risikos in einem Versicherungsunternehmen kommen kann. Gerade bei der internen Modellierung der Risikolage eines Versicherers ist die Anwendung von Copulae besonders geeignet.

## Literaturverzeichnis

- Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), Dependence Structure and Risk Measure, in: Journal of Business 2003, Vol. 76, no. 3, S. 411-438.
- Bukowski, J./Korn, L./Wartenberg, D.* (1995), Correlated Inputs in Quantitative Risk Assessment: The Effects of Distributional Shape, in: Risk Analysis 1995, Vol. 15, No. 2, S. 215-219.
- Cramer, E./Kamps, U.* (2008), Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik – Ein Skript für Studierende der Informatik, der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, 2. Auflage, Berlin Heidelberg 2008.
- Denuit, M./Dhaene, J./Goovaerts, M./Kaas, R.* (2005), Actuarial Theory for Dependent Risks – Measures, Orders and Models, Chichester 2005.
- Di Clemente, A./Romano, C.* (2004), Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach, in: Economic Notes 2004, Vol. 33, no. 3, S. 325-357.
- Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (1999), Correlation: Pitfalls and Alternatives (März 1999), URL: <http://www.math.ethz.ch/~mcneil/ftp/risk.pdf> (27.6.2008).

- Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls (Juli 1999), URL: <http://www.math.ethz.ch/~strauman/preprints/pitfalls.pdf> (18.6.2008).
- Faivre, F.* (2003), Copula: A new vision for Economic Capital and application to a four line of business company (August 2003), URL: <http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Berlin/Faivre.pdf> (19.6.2008).
- Frees, E. W./Valdez, E. A.* (1998), Understanding Relationships Using Copulas, in: North American Actuarial Journal 1998, Vol. 2, Number 1, S. 1-25.
- Genest, C./Rivest, L.-P.* (1993), Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas, in: Journal of the American Statistical Association 1993, Vol. 88, No. 423, S. 1034-1043.
- International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), A Global Framework for Insurer Solvency Assessment: Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party (2004), URL: [http://www.actuaires.org/LIBRARY/Papers/Global\\_Framework\\_Insurer\\_Solvency\\_Assessment-public.pdf](http://www.actuaires.org/LIBRARY/Papers/Global_Framework_Insurer_Solvency_Assessment-public.pdf) (22.5.2008).
- Junker, M./May, A.* (2005), Measurement of aggregate risk with copulas, in: Econometrics Journal 2005, Vol. 8, (3), S. 428-454.
- Mummenhoff, A.* (2007), Analyse des deutschen Standardmodells für Lebensversicherer unter Solvency II, Ulm 2007.
- Nelsen, R. B.* (2006), An Introduction to Copulas, 2. Auflage, New York 2006.
- Pfeifer, D.* (2003), Möglichkeiten und Grenzen der mathematischen Schadenmodellierung, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 2003, 92. Band, Heft 4, S. 665-696.
- Sklar, M.* (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, in: Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 1959, Heft 8, S. 229-231.
- Szegö, G.* (2002), Measures of risk, in: Journal of Banking and Finance 2002, Vol. 26, Issue 7, S. 1253-1272.
- Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas (2006), URL: <http://www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf> (20.6.2008).

*Venter, G. G.* (2002), Tails of Copulas, in: Proceedings of the Casualty Actuarial Society 2002, Vol. 89, Number 171 Part 2, S. 68-113.

*Zwiesler, H.-J.* (2005), Asset-Liability-Management – die Versicherung auf dem Weg von der Planungsrechnung zum Risikomanagement, in: Spremann, K. (Hrsg.) (2005), Versicherungen im Umbruch – Werte Schaffen, Risiken managen, Kunden gewinnen, Berlin Heidelberg 2005, S. 117-131.