

# German **RISK** and **INSURANCE** Review



## **Quantifizierung operationeller Risiken: Der Loss Distribution Approach**

**Peter Albrecht, Edmund Schwake und Peter Winter**

**Universität Mannheim**

**Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Ver-  
sicherungswirtschaft**

**Schloss, Raum O 223, 68131 Mannheim, Germany**

## **Zusammenfassung**

Im Rahmen der aktuellen Diskussion über die effektive Messung operationeller Risiken auf der Basis interner Modelle hat vor allem der Loss Distribution Approach in der Literatur besondere Beachtung gefunden. Dieser Ansatz hat seine Wurzeln in einem traditionellen Ansatz der Versicherungsmathematik, der kollektiven Risikotheorie.

Die vorliegende Ausarbeitung stellt daher die kollektive Risikotheorie in ihren Grundelementen dar, stellt die Verbindung zur Modellierung operationeller Risiken her und gibt einen Überblick über aktuelle Entwicklungen im Rahmen des Loss Distribution Approach.

Schlagworte: kollektive Risikotheorie, operationelle Risiken, loss distribution approach

## **Abstract**

Given the current discussion on an effective measurement of operational risks on the basis of internal models, the Loss Distribution Approach has obtained special attention in the literature. This approach has its roots in a traditional field of insurance mathematics, the collective theory of risks.

The present contribution presents the basic elements of collective risk theory, establishes the connection to the modelling of operational risks and gives an overview on recent developments of the Loss Distribution Approach.

Keynotes: collective theory of risk, operational risk, loss distribution approach

# Quantifizierung operationeller Risiken: Der Loss Distribution Approach

Peter Albrecht, Edmund Schwake und Peter Winter\*

## 1 Einführung

## 2 Das kollektive Modell der Risikotheorie

- 2.1 Einführung
- 2.2 Der Schadenzahlprozess
- 2.3 Die Schadenhöhe
- 2.4 Der Gesamtschadenprozess
- 2.5 Auswertung der Gesamtschadenverteilung
- 2.6 Quantilbestimmung und Value at Risk

## 3 Operationelles Risiko

- 3.1 Basel II und Solvency II
- 3.2 Loss Distribution Approach: Univariate Modelle
- 3.3 Loss Distribution Approach: Multivariate Modelle

## 4 Schlussbemerkungen

Anhang: Gefährliche Verteilungen

Literaturhinweise

---

\* Universität Mannheim; Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft; Schloss, Raum O 223, 68131 Mannheim; <http://insurance.bwl.uni-mannheim.de>; email: [risk@bwl.uni-mannheim.de](mailto:risk@bwl.uni-mannheim.de)

## 1 Einführung

Obwohl operationelle Risiken seit jeher untrennbar mit unternehmerischem Handeln verbunden sind<sup>1</sup>, zeichnet sich erst in jüngerer Zeit die Tendenz zu einer separaten Betrachtung dieser Risikokategorie ab, einhergehend mit einer Diskussion zur effektiven Messung operationeller Risiken. Eine Intensivierung dieser Diskussion erfolgte im Kontext der Verabschiedung des neuen Baseler Eigenkapitalakkords<sup>2</sup>, üblicherweise kurz Basel II genannt.

Vor diesem Hintergrund wird insbesondere ein Ansatz in der Literatur eingehend diskutiert, der sogenannte *Loss Distribution Approach*<sup>3</sup>. Interessanterweise hat dieser Ansatz seine Wurzeln in einem sehr traditionellen Gebiet der (Schaden-)Versicherungsmathematik, der *kollektiven Risikothorie* (*collective theory of risk*).

Dieser Zweig der Versicherungsmathematik kann mittlerweile auf eine über 100-jährige Tradition zurückblicken. Sie wurde begründet durch eine Arbeit von Filip Lundberg<sup>4</sup> im Jahre 1903. Seine Kernidee, den kumulierten Schadenprozess eines Kollektivs von Versicherten durch einen zusammengesetzten Poissonprozess zu modellieren, eröffnete der Risikomodellierung im Versicherungsbereich zum einen eine direkte kollektive Sicht<sup>5</sup> und zum anderen eine dynamische Perspektive. Die Arbeit von Filip Lundberg fiel in eine Zeit, in der die Wahrscheinlichkeitstheorie noch in den Anfängen einer mathematischen Fundierung stand und blieb lange Zeit unbeachtet, wohl auch unverstanden. Der Durchbruch der kollektiven Risikothorie erfolgte durch die Arbeit von Harald Cramér (1930), der den Ansatz von Lundberg auf ein tragfähiges mathematisches Fundament stellte. Seitdem hat die kollektive Risikothorie eine Vielzahl von Erweiterungen und Anwendungen erfahren<sup>6</sup> und sie bildet heute die modelltheoretische Grundlage<sup>7</sup> der Schadenversicherungsmathematik (Non-Life Insurance).

---

<sup>1</sup> Traditionellerweise werden operationelle Risiken daher in der betriebswirtschaftlichen Literatur auch unter das allgemeine unternehmerische Risiko subsumiert.

<sup>2</sup> Vgl. hierzu Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, insbesondere Abschnitt V).

<sup>3</sup> Vgl. hierzu näher Abschnitt 3.1

<sup>4</sup> Eine historische Würdigung der Arbeit von Filip Lundberg enthält Cramér (1969).

<sup>5</sup> Die Modellierung des Kollektivs erfolgt somit nicht durch eine Aggregation über die einzelnen Kollektivmitglieder.

<sup>6</sup> Zu aktuellen Entwicklungen vgl. etwa Klüppelberg (2001).

<sup>7</sup> Man vgl. etwa die Lehrbuchdarstellungen Bühlmann (1970), Daykin et al. (1994), Klugman et al. (2004), Mikosch (2004) und Schmidt (1996; 2002, Kapitel 7 ff.).

Es ist daher die Zielsetzung des vorliegenden Beitrags, einige der zentralen Grundlagen der kollektiven Risikotheorie zu beleuchten und in den Anwendungskontext der Quantifizierung operationeller Risiken zu stellen. Darüber hinaus werden aktuelle Entwicklungen des Loss Distribution Approach in die Diskussion mit einbezogen.

## 2 Das kollektive Modell der Risikotheorie

### 2.1 Einführung

Ausgangspunkt der kollektiven Risikotheorie ist ein gegebenes Kollektiv von Versicherten im Bereich der Schadenversicherung – also etwa in der Haftpflichtversicherung (Kraftfahrzeughaftpflicht, Allgemeine Haftpflicht) oder der Versicherung gegen Naturgefahren (Feuer, Sturm, Überschwemmung). Ziel der Modellierung ist dann die Quantifizierung des kollektiven Gesamtschadens  $S(t)$  des Kollektivs über das Zeitintervall  $[0,t]$ . In dieser dynamischen Version erfolgt die akkumulierte Betrachtung des kollektiven Gesamtschadens bis zum Zeitpunkt  $t$  und  $S(t)$  ist ein stochastischer Prozess, der *Gesamtschadenprozess* (*accumulated claim process*).

Eine statische Modellierungsvariante erhält man durch Fixierung der Zeitperiode (typischerweise  $t = 1$ ) und der Betrachtung des *kollektiven Gesamtschadens* (*aggregate loss*)  $S = S(1)$ , einer Zufallsgröße.

Der spezifische Ansatz der kollektiven Risikotheorie beruht nun auf einer Disaggregation des kollektiven Gesamtschadens in die Komponenten *Schadenzahl* (*claim number* bzw. *claim frequency*) und *Schadenhöhe* (auch: *Schadensumme*) pro Schadenfall (*loss severity*). In formaler Hinsicht lautet der Ansatz

$$(2.1a) \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

(mit der Konvention  $S(t) = 0$  für  $N(t) = 0$ ) in der dynamischen Variante bzw.

$$(2.1b) \quad S = \sum_{i=1}^N X_i .$$

(mit der Konvention  $S = 0$  für  $N = 0$ ) in der statischen Variante.

Dabei ist  $N(t)$  der sog. *Schadenzahlprozess*, der die Anzahl der Schäden des Kollektivs im Zeitintervall  $[0,t]$  erfasst bzw. entsprechend  $N = N(1)$  die Schadenzahl. Die Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  entsprechen den Schadenhöhen (pro Schadenfall),  $X_i > 0$  quantifiziert die Höhe des  $i$ -ten Schadenfalls im Kollektiv. Im Gegensatz zum *individuellen Modell* der Risikotheorie<sup>8</sup> – hier erfolgt die Aggregation über die Gesamtschäden der Mitglieder des gegebenen Kollektivs – wird bei der kollektiven Risikotheorie die Aggregation über die Schäden pro Schadenfall vorgenommen. Dieser Ansatz beinhaltet somit die Möglichkeit, ein erweitertes Spektrum an Informationen in die Modellierung einbeziehen zu können. Eine Visualisierung des Gesamtschadenprozesses enthält Abbildung 1.

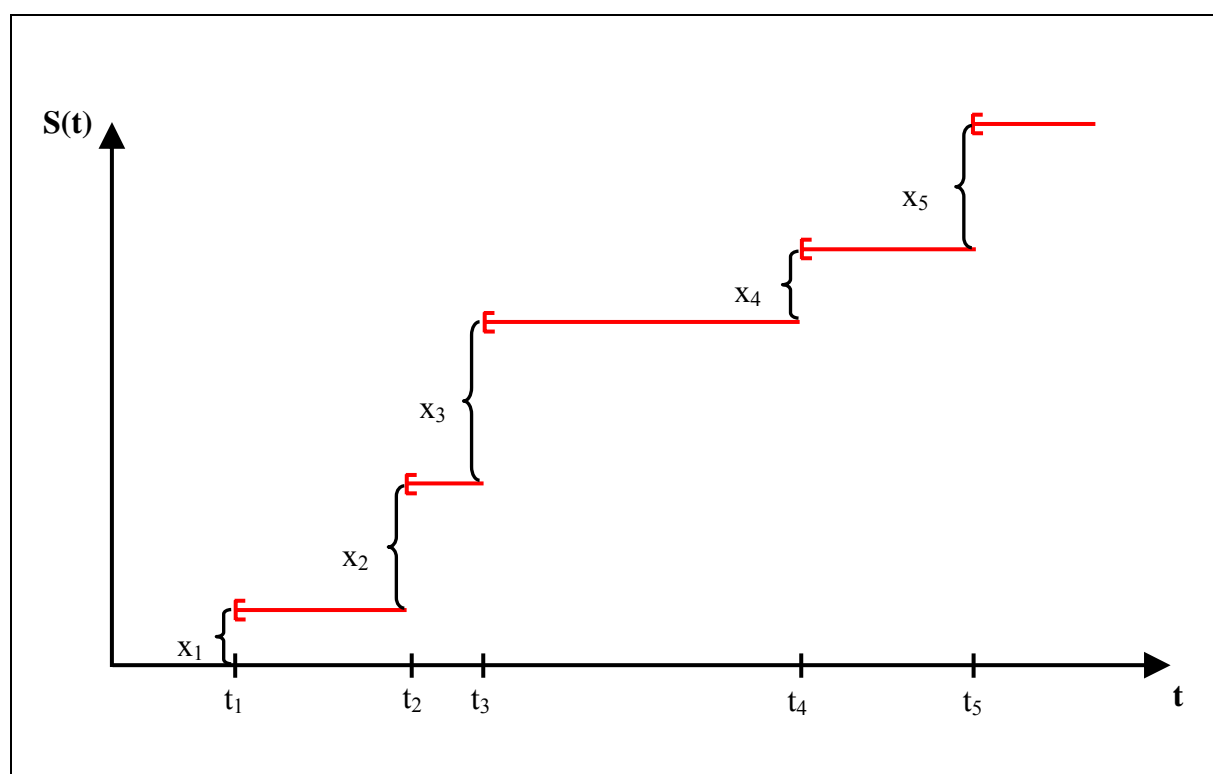


Abbildung 1: Illustration des Gesamtschadenprozesses

<sup>8</sup> Vgl. hierzu etwa Schmidt (2002, Kapitel 6).

Die Abbildung erfasst dabei einen möglichen Realisationspfad des Gesamtschadenprozesses und verdeutlicht, dass der Prozess  $S(t)$  ein Sprungprozess mit zufallsabhängiger (positiver) Sprunghöhe ist.

Wenden wir uns damit den Komponenten des Gesamtschadenprozesses zu.

## 2.2 Der Schadenszahlprozess

Der Eintritt von Schadenfällen auf der Ebene eines einzelnen Versicherungsnehmers oder eines Kollektivs von Versicherten kann modelltheoretisch durch einen *Punktprozess* (*point process*), d.h. eine Folge  $T_1, T_2, \dots$  von Zufallsvariablen erfasst werden.

Es gilt  $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$  und die Größen  $T_i$  entsprechen den *Schadeneintrittszeitpunkten* (*claim occurrence times*). Dabei bedeutet die Realisation  $T_n = t_n$ , dass zum Zeitpunkt  $t_n$  der n-te Schaden eintritt. In Abbildung 1 sind entsprechend die ersten fünf Schadeneintrittszeitpunkte erfasst.

Jedem Punktprozess kann nun auf die folgende Weise ein korrespondierender *Zählprozess* (*counting process*)  $\{N(t), t \geq 0\}$  zugeordnet werden. Man definiert

$$(2.2) \quad N(t) = \max \{i \in \mathbb{N}; T_i \leq t\} .$$

Erfasst wird somit die Anzahl von Schadeneintritten im Zeitintervall  $[0, t]$ . Eine Illustration der Korrespondenz zwischen Punktprozess und assoziiertem Zählprozess enthält die Abbildung 2.

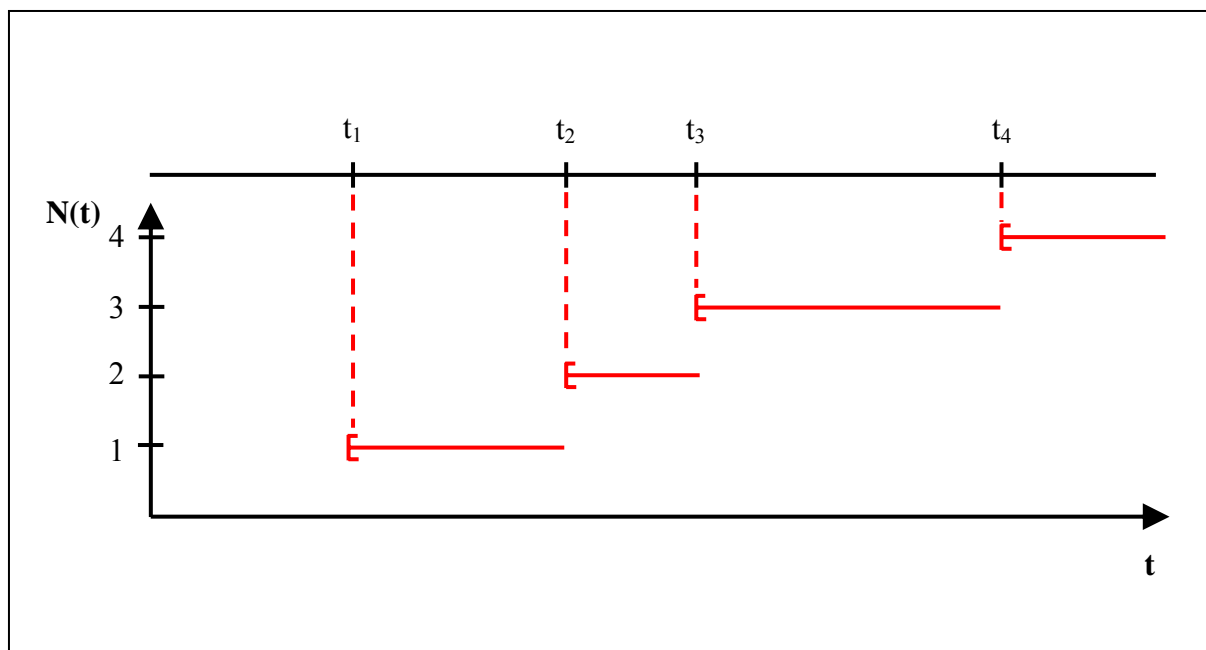


Abbildung 2: Punktprozess und assoziierter Zählprozess

Die zufallsabhängige Größe  $N(t)$  gibt im Versicherungsfall (Schadenzahlprozess) an, wie viele Schäden im Zeitintervall  $[0, t]$  eingetreten sind. Als Standardannahme fungiert hierbei die Annahme  $P(T_1 > 0) = 1$  und somit  $P(N(0) = 0) = 1$ .

Die Größe  $N = N(1)$  entspricht dann der Schadenzahl in der ersten Periode, die Verteilung von  $N$  wird als *Schadenzahlverteilung* bezeichnet.

Eine weitere alternative Charakterisierung des Schadenzahlprozesses kann über die *Schadenzwischenzeiten* (*claim interoccurrence times* bzw. *claim interarrival times*) erfolgen. Diese sind definiert durch

$$(2.3) \quad W_1 = T_1, \quad W_2 = T_2 - T_1, \quad \dots, \quad W_n = T_n - T_{n-1}.$$

Als Standardmodell für einen Punktprozess bzw. für den Schadenzahlprozess im Besonderen ist ohne Zweifel der *homogene Poissonprozess* (HPP) anzusehen. Wir geben im Folgenden eine traditionelle axiomatische Charakterisierung des HPP, wie sie etwa in Parzen (1962, 118 f.) zu finden ist<sup>9</sup>. Eine zentrale Rolle spielen hierbei die Zuwächse  $N(t+h) - N(t)$  des Prozesses, d.h. die Anzahl von Schäden im Zeitintervall  $[t, t+h]$ .

<sup>9</sup> Für alternative Charakterisierungen vgl. etwa Rolski et al. (1999, 157) sowie Cont/Tankov (2004, 44 ff.).



Ein Zählprozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  heißt homogener Poissonprozess (HPP), wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

$$(2.4a) \quad N(0) = 0$$

$$(2.4b) \quad N(t) \text{ besitzt unabhängige Zuwächse (über disjunkte Zeitintervalle)}$$

$$(2.4c) \quad \text{Für alle } t > 0 \text{ gilt } 0 < P[N(t) > 0] < 1.$$

In jedem Zeitintervall  $[0, t]$  kann somit (unabhängig davon, wie klein dieses ist) mit positiver Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintreten, aber es muss keines eintreten.

$$(2.4d) \quad N(t) \text{ besitzt stationäre Zuwächse}$$

$$(2.4e) \quad N(t) \text{ ist ein Prozess ohne multiple Ereignisse (regulärer Prozess)}$$

Formal läuft dies auf die Forderung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} = 0 \text{ f. alle } t \geq 0$$

hinaus. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem kleinen Zeitintervall mehr als ein Schaden eintritt, ist somit klein im Vergleich zur Länge des Intervalls. Diese Anforderung schließt die Möglichkeit des Eintretens von Kumulschäden aus.

Aus den vorstehenden Axiomen lässt sich folgern, dass ein Parameter  $\lambda > 0$  existiert, so dass gilt:

$$(2.5) \quad P_n(t) = P[N(t) = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.$$

Die sog. *Zählverteilung*  $P_n(t)$  folgt somit einer Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda t$ . Im Spezialfall  $t = 1$  (Schadenzahlverteilung) liegt eine Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda$  vor.

Weitere Eigenschaften des HPP sind:

- 1)  $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t$ .  
Erwartungswert und Varianz der Zählverteilung über ein fixiertes Zeitintervall  $[0, t]$  sind somit stets gleich groß. Dies ist eine kritische Eigenschaft im Hinblick auf empirische Anwendungen des HPP. Ferner sind Erwartungswert und Varianz proportional zur Länge des betrachteten Zeitintervalls.
- 2) Aufgrund der unabhängigen Zuwächse ist der HPP ein Markovprozess, speziell ein Geburtsprozess mit Intensität  $\lambda$ .
- 3) Die Schadenzwischenzeiten sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $1/\lambda$ .
- 4) Die Schadeneintrittszeitpunkte folgen einer Erlang-Verteilung (d.h. einer Faltung von Exponentialverteilungen) bzw.  $2 \lambda T_n$  folgt einer Chi-Quadrat-Verteilung.
- 5) Der HPP ist wie der Wienerprozess ein Lévy-Prozess (d.h. charakterisiert durch unabhängige und stationäre Zuwächse). Der Wienerprozess besitzt jedoch stetige Pfade, der HPP aber Pfade mit Sprüngen (*Sprungprozess, Jump Process*).

Wenden wir uns schließlich noch der Interpretation des Poissonparameters zu. Zunächst gilt

$$(2.6) \quad \lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) > 0]}{h}$$

Es liegt somit eine konstante Intensität eines Schadeneintritts (Schadenintensität) vor. Die Wahrscheinlichkeit für einen Schadeneintritt in einem Zeitintervall der Länge  $h$  ist daher approximativ gleich  $\lambda h$ .

Ferner gilt  $\lambda = E[N(1)]$ , d.h.  $\lambda$  entspricht der mittleren Schadenzahl in einer Periode der Länge 1.

Der Parameter  $\lambda$  wird im Kontext der Schadenversicherung auch als *Schadenneigung* (*accident proneness*) interpretiert.

Eine leichte Variation des Basismodells der Schadenanzahlverteilung mit einem konstanten (endogenen) Parameter  $\lambda$  besteht schließlich darin, diesen im Wege eines (typischerweise linearen) Regressionsmodells<sup>10 11</sup> als Funktion von exogenen Parametern  $x_1, \dots, x_n$  anzusetzen, beispielsweise also

$$(2.7) \quad \lambda = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n .$$

In der Schadenversicherung kann dies insbesondere im Kontext von Tarifierungsmodellen eingesetzt werden<sup>12</sup>, um im Wege einer simultanen Modellierung<sup>13</sup> die unterschiedliche Schadenneigung einzelner Tarifklassen zu erfassen<sup>14</sup>.

Gibt man beim HPP die Forderung des Vorliegens stationärer Zuwächse auf, so resultiert hieraus der *inhomogene Poissonprozess* (IPP). Dieser ist insbesondere gekennzeichnet durch eine zeitabhängige Schadenintensität

$$(2.8) \quad \lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) > 0]}{h} ,$$

beispielsweise  $\lambda(t) = a \exp(-bt)$ .

Definiert man  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ , so lautet die Zählverteilung nunmehr

$$(2.9) \quad P_n(t) = e^{-\Lambda(t)} [\Lambda(t)]^n / n!$$

---

<sup>10</sup> Zu den theoretischen Grundlagen eines solchen Modells vgl. insbesondere Albrecht (1983 a).

<sup>11</sup> Entspricht einer der exogenen Parameter einer Zeitvariablen (Alternative: Modellierung alternativer Zeitperioden mit Dummyvariablen), so liegt bereits eine Variante des inhomogenen Poissonprozesses vor.

<sup>12</sup> Vgl. etwa Albrecht (1983 b).

<sup>13</sup> Im Unterschied zu einer für jede einzelne Tarifklasse separaten Modellierung.

<sup>14</sup> Analog kann dies im Kontext operationeller Risiken benutzt werden, um für die in Kapitel 3 behandelten Risikozellen des Geschäftsfeld/Ereigniskategorie-Typus eine simultane Schätzung der erwarteten Anzahl operationeller Risiken durchzuführen.

und es gilt  $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \Lambda(t)$ .

Der IPP besitzt nun zwar keine stationären Zuwächse mehr, aber nach wie vor unabhängige Zuwächse. Er ist daher ein Markovprozess, insbesondere ein Geburtsprozess mit Intensitätsfunktion  $\lambda(t)$ .

Wenden wir uns nunmehr dem gemischten Poissonprozess zu. Dieser kann auf sehr unterschiedliche Arten und Weisen eingeführt werden<sup>15</sup>. Wir folgen im Weiteren der traditionellen auf (Ove) Lundberg (1964) zurückgehenden Charakterisierung.

Ein *gemischter Poissonprozess (mixed Poisson process, MPP)* ist ein Markovscher Geburtsprozess mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$ , für dessen Zählfunktion gilt (*gemischte Poissonverteilung*)

$$(2.10) \quad P_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda),$$

wobei  $U(\lambda)$  die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen  $\Lambda$  mit  $U(0) = 0$  ist.  $U(\lambda)$  wird als *mischende Verteilung* des Prozesses bezeichnet.

Im Kontext der Schadenversicherung basiert diese Modellierung auf der folgenden intuitiven Überlegung. Die Schadenneigung der Mitglieder eines Kollektivs ist nicht identisch (homogenes Kollektiv) und auch nicht deterministisch, sondern eine Zufallsgröße. Pro Versicherungsnehmer erfolgt eine zufällige Realisation  $\Lambda = \lambda$  und legt damit dessen konkrete Schadenneigung fest<sup>16</sup>. Die mischende Verteilung (Strukturfunktion) quantifiziert die Verteilung der Schadenneigung im betrachteten Kollektiv und damit die Heterogenität dieses Kollektivs.

Im Falle des MPP mit mischender Variable  $\Lambda$  folgt insbesondere

$$(2.11a) \quad E[N(t)] = t E(\Lambda)$$

und

---

<sup>15</sup> Vgl. hierzu etwa Albrecht (1981).

<sup>16</sup> Man vgl. hierzu etwa auch das in Bühlmann (1970, 65 ff.) dargestellte Urnenmodell.

$$(2.11b) \quad \text{Var}[N(t)] = t^2 \text{Var}(\Lambda) + t E(\Lambda) > E[N(t)].$$

Diese Relation von  $E[N(t)]$  und  $\text{Var}[N(t)]$  ist oftmals empirisch realistischer als  $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)]$  wie beim HPP und IPP. Zugleich spiegelt diese Eigenschaft eine größere Gefährlichkeit der Schadenzahlverteilung wider, d.h. es besteht eine größere Wahrscheinlichkeit für höhere Schadenzahlen. Der MPP besitzt stationäre Zuwächse, jedoch keine unabhängigen Zuwächse.

Ein prominenter Vertreter des MPP ist der *Pólya-Prozess*. Hierbei verwendet man die Gamma-Verteilung als mischende Verteilung und es resultiert

$$(2.12) \quad P_n(t) = \binom{n+a-1}{n} \left( \frac{t}{b+t} \right)^n \left( \frac{b}{b+t} \right)^a.$$

Dies ist eine Form der negativen Binomialverteilung.

Es gilt weiter:

$$(2.13) \quad E[N(t)] = \frac{at}{b}, \quad \text{Var}[N(t)] = \frac{at}{b} \left( 1 + \frac{t}{b} \right).$$

Wenden wir uns abschließend dem *doppelt-stochastischen Poissonprozess*<sup>17</sup> (*doubly stochastic Poisson process*) zu. Dieser geht zurück auf Cox (1955) – wird deshalb neuerdings auch *Cox-Prozess* genannt – und entsteht intuitiv, indem man die Intensitätsfunktion  $\lambda(t)$  des IPP als stochastischen Prozess  $\Lambda(t)$  auffasst.

Definieren wir die (mischende) Verteilungsfunktion  $U(\lambda, t)$  durch

$$(2.14) \quad U(\lambda, t) = P(\Lambda^*(t) \leq \lambda t),$$

wobei  $\Lambda^*(t) = \int_0^t \Lambda(s) ds$ , so resultiert hieraus als Zählverteilung

---

<sup>17</sup> Vgl. näher etwa Grandell (1976).

$$(2.15) \quad P_n(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} U(d\lambda, t) = E \left[ \frac{\Lambda^{*n}(t)}{n!} e^{-\Lambda^*(t)} \right].$$

Im Spezialfall einer zeitunabhängigen stochastischen Intensitätsfunktion bzw. zeitunabhängigen mischenden Verteilung ergibt sich wieder der MPP.

Die Zählverteilung (2.15) kann jedoch nur für wenige einfache (und damit unrealistische) Modelle bestimmt werden, so dass Anwendungen in der Schadenversicherung nur vereinzelt existieren. Weitere Anwendung haben Cox-Prozesse im Rahmen von Kreditrisikomodellen gefunden<sup>18</sup>.

Damit beschließen wir unsere Ausführungen zum Schadenzahlprozess und verweisen für weitere Verallgemeinerungen (etwa: Erneuerungsprozesse, Lévy-Prozesse, allgemeine Punktprozesse) auf die entsprechende Literatur<sup>19</sup>.

### 2.3 Die Schadenhöhe

Als Verteilung für die Schadenhöhe pro Schadenfall kommt grundsätzlich jede Verteilung einer Zufallsvariablen  $X \geq 0$ , d.h., in Termen der Verteilungsfunktion  $F(0) = 0$ , in Frage. In der Literatur betrachtet werden standardmäßig u.a. Exponential-, Gamma-, Lognormal- und Paretoverteilung, daneben auch Inverse Gauß-, Weibull-, Loggammaverteilung sowie viele andere mehr. Überblicke über entsprechende Verteilungen bzw. Klassen von Verteilungen enthalten Kleiber/Kotz (2003), Klugman et al. (2004, Appendix A) sowie McNeil et al. (2005, Appendix A.2). Diskussionen auf der Basis empirischer Daten sind beispielsweise zu finden in Mack (1997) sowie in McNeil<sup>20</sup> (1997).

Von großer Relevanz für einzelne Versicherungszweige, vor allem im Haftpflichtbereich, in der Industrieversicherung, im Bereich der Versicherung von Naturkatastrophen sowie der Rückversicherung, sind *gefährliche* Verteilungen (*heavy tailed distributions, fat tailed distri-*

---

<sup>18</sup> Vgl. etwa Lando (2004, 112 ff.).

<sup>19</sup> Etwa Bühlmann (1970), Mikosch (2004), Rolski et al. (1999) oder Schmidt (1996).

<sup>20</sup> Hier auf Basis der Extremwerttheorie.

*butions*). Gefährliche Verteilungen beinhalten die Möglichkeit, dass sich – relativ zum Erwartungswert – sehr große („extreme“) Schadenhöhen mit nicht zu vernachlässigender Wahrscheinlichkeit realisieren können. Von Relevanz ist hier somit die Ausprägung des (rechten) Randbereichs (Verteilungsende, Verteilungsflanke, Tail) der Schadenhöhenverteilung. Hier besitzen gefährliche Verteilungen mehr Wahrscheinlichkeitsmasse als die nicht gefährlichen Verteilungen (medium und light tailed distributions). Intuitiv erfordern daher gefährliche Verteilungen insbesondere eine höhere Unterlegung mit Risikokapital.

Aufgrund der besonderen Relevanz gefährlicher Verteilungen sowohl in der Schadenversicherung als auch im Kontext operationeller Risiken haben wir grundlegende Konzepte zu ihrer quantitativen Charakterisierung im Anhang zusammengestellt. Wie dort ausgeführt, bilden die sogenannten *subexponentiellen Verteilungen* eine besonders geeignete Verteilungsklasse zur Repräsentation gefährlicher Verteilungen.

Zu den subexponentiellen Verteilungen gehören die Lognormalverteilung, die Weibullverteilung (für Parameterwerte  $0 < \tau < 1$ ) und die Benktanderverteilungen sowie als „besonders gefährliche“ Vertreter die Pareto-, die Burr-, die Loggammaverteilung sowie stabile Verteilungen. Die besonders gefährlichen Verteilungen<sup>21</sup> besitzen dabei insbesondere die Eigenschaft, dass nicht alle Momente  $E(X^n)$  endlich sind. Zu den nicht gefährlichen Verteilungen zählen beispielsweise die Exponential-, die Gamma-, die Weibull- (für Parameterwerte  $\tau \geq 1$ ) und die gestutzte Normalverteilung. Auch diese sind grundsätzlich von Relevanz, da es auch „weniger gefährliche“ Versicherungszweige, wie etwa die Kraftfahrzeughaftpflichtversicherung gibt.

## 2.4 Der Gesamtschadenprozess

Kommen wir damit zurück auf den Gesamtschadenprozess gemäß (2.1a) bzw. als Spezialfall auf die Gesamtschadenverteilung (2.1b).

---

<sup>21</sup> Zu deren näherer Charakterisierung vgl. man erneut den Anhang.

Die Standardannahmen, auf die wir uns in der vorliegenden Ausarbeitung beschränken werden<sup>22</sup>, bestehen dann darin, zum einen die Schadenhöhen  $X_i$  als unabhängige und identisch nach  $X$  verteilte Zufallsgrößen anzunehmen und zum anderen für jedes feste  $t$  und alle  $i$  von der Unabhängigkeit von  $N(t)$  und den  $X_i$  auszugehen.

Ist  $N(t)$  dann ein HPP, so bezeichnet man  $S(t)$  als *zusammengesetzten Poissonprozess* (*compound Poisson process*, CPP) bzw. die Verteilung von  $S = S(1)$  als *zusammengesetzte Poissonverteilung*. Die Eigenschaft unabhängiger und stationärer Zuwächse des HPP überträgt sich dabei (dies gilt auch generell<sup>23</sup>) auf den zusammengesetzten Prozess. Der CPP gehört damit genauso wie der HPP (oder aber auch der Wienerprozess) zur allgemeinen Klasse der Lévy-Prozesse.

Bei Gültigkeit der Standardannahmen gelten die folgenden Beziehungen:

$$(2.16) \quad E[S(t)] = E[N(t)]E(X)$$

$$(2.17) \quad \text{Var}[S(t)] = E[N(t)]\text{Var}(X) + E(X)^2 \text{Var}[N(t)]$$

$$(2.18) \quad \begin{aligned} G_t(x) = P[S(t) \leq x] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = n]P[S(t) \leq x \mid N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)F^{n*}(x), \quad x \geq 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

dabei bezeichnet  $F^{n*}$  die  $n$ -te Faltung der Verteilungsfunktion  $F$ .

Des Weiteren gilt:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \varphi_{S(t)}(s) &= E[e^{isS(t)}] = E\{E[e^{is(X_1 + \dots + X_{N(t)})} \mid N(t) = n]\} \\ &= E\{[E(e^{isX})]^{N(t)}\} = E[\varphi_X(s)^{N(t)}] = E[e^{N(t)\ln\varphi_X(s)}] \\ &= m_{N(t)}[\log\varphi_X(s)], \end{aligned}$$

<sup>22</sup> Zu aktuellen Verallgemeinerungen vgl. etwa Albrecher/Boxma (2004), Boudreault et al. (2006) sowie Ignatov/Kaishev (2000).

<sup>23</sup> Vgl. etwa Schmidt (1996, 105 ff.).



dabei bezeichne  $\varphi$  die charakteristische Funktion und  $m$  die momenterzeugende Funktion.

## 2.5 Auswertung der Gesamtschadenverteilung

Die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens gemäß (2.18) lässt sich allerdings nur für sehr einfache (und nicht praxisrelevante) Fälle explizit (d.h. analytisch) bestimmen. Man ist daher auf Verfahren der Monte Carlo-Simulation oder aber auf Approximationsverfahren angewiesen. Neben einer direkten Verteilungsapproximation (beispielsweise einer Gamma-Approximation<sup>24</sup>) haben in der risikothoretischen Literatur vor allem die Panjer-Rekursion (diese beruht auf einer Diskretisierung der Schadenhöhenverteilung und setzt als Schaden-zahlverteilung im Wesentlichen Binomial-, Poisson- oder Negative Binomialverteilung voraus) sowie die Fast Fourier Transformation (basierend auf numerischen Verfahren der Inversion der charakteristischen Funktion) größere Bedeutung erlangt<sup>25</sup>.

Interessiert man sich nur für die Eigenschaften der Gesamtschadenverteilung für große Schäden, d.h. das Tailverhalten, so beinhaltet das Theorem 1.3.9 in Embrechts et al. (1997, 45) eine fundamentale Charakterisierung. Ist  $X$  subexponentiell und gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n P_t(n) < \infty$  für ein  $\varepsilon > 0$  (diese Bedingung ist beispielsweise erfüllt für den homogenen, den inhomogenen sowie den gemischten Poissonprozess), so ist  $G_t$  ebenfalls subexponentiell und es gilt

$$(2.20) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} = E[N(t)] \text{ bzw. } \bar{G}_t(x) \sim E[N(t)]\bar{F}_t(x) \quad \text{f. } x \rightarrow \infty.$$

Der Tail von  $S(t)$  ist somit im Falle einer gefährlichen Schadenhöhenverteilung bestimmt durch den Tail der Schadenhöhen. Interessanterweise spielt hierbei  $\text{Var}[N(t)]$  keine Rolle, d.h. es genügt, hinsichtlich des Schadenzahlprozesses für empirische Anwendungen mit einer Schätzung für  $E[N(t)]$  zu arbeiten.

<sup>24</sup> Vgl. etwa Beard et al. (1984, 121) oder McNeil et al. (2005, 477).

<sup>25</sup> Vgl. zu den diversen Verfahren etwa Beard et al. (1984, 100 ff.), Buchwalder et al. (1993), Heilmann (1987, 79 ff.), Klugman et al. (2004, 159 ff.), McNeil et al. (2005, 476 ff.) sowie Mikosch (2004, 126 ff.).

## 2.6 Quantilbestimmung und Value at Risk

In vielen Anwendungen des Risikomanagements, insbesondere im Kontext der Risikokapitalbestimmung, interessiert man sich nicht für die gesamte Verteilungsfunktion, sondern nur für bestimmte Partialinformationen. Von besonderem Interesse sind die  $(1-\alpha)$ -Quantile  $Q_{1-\alpha}[S(t)] = G_t^{-1}(1-\alpha)$  für vorgegebene Konfidenzniveaus  $0 < \alpha < 1$  (klein), denn diese entsprechen dem Value at Risk der Gesamtschadenverteilung zum Konfidenzniveau  $\alpha$  (über die betrachtete Periode  $[0,t]$ ).

Grundsätzlich kann die Quantilbestimmung auf der Basis jeder der in Abschnitt 2.5 dargestellten Methoden zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung erfolgen. Im Allgemeinen ist es hierbei jedoch nicht möglich, die Verbindung zwischen den Parametern der zugrundeliegenden Verteilungen und dem Value at Risk herzustellen, d.h. entsprechende Sensitivitätsanalysen sind sehr aufwändig. Aus diesem Grunde besteht ein Interesse an der Entwicklung expliziter Approximationsformeln für die Quantilbestimmung.

Ein Beispiel hierfür bietet die Normal-Power (NP)-Approximation, einer in der Risikotheorie sehr populären Approximation, die zurückgeht auf Studien einer Gruppe finnischer Versicherungsmathematiker um Pentikainen, vgl. etwa Beard et al. (1984, 107 ff.). Im Kern beruht diese Approximation auf einer Edgeworth-Entwicklung. Das  $(1-\alpha)$ -Quantil von  $S(t)$  besitzt hierbei die explizite Approximation

$$(2.21) \quad Q_{1-\alpha}[S(t)] = E[S(t)] + N_{1-\alpha} \sigma[S(t)] + \frac{1}{6} (N_{1-\alpha}^2 - 1) \frac{M_3[S(t)]}{\text{Var}[S(t)]}.$$

Dabei entspricht  $M_3$  dem dritten absoluten Moment.

Liegt dem zusammengesetzten Poissonprozess ein homogener Poissonprozess mit Parameter  $\lambda$  als Schadenprozess zugrunde, dann gilt  $E[S(t)] = \lambda t E(X)$ ,  $\text{Var}[S(t)] = \lambda t E(X^2)$  sowie  $M_3[S(t)] = \lambda t E(X^3)$ .

Die NP-Approximation ist hierbei zufriedenstellend, so lange die Schiefe von  $S(t)$  nicht zu groß ist. Als Faustregel wird hier in der Literatur ein Wert von 3 genannt<sup>26</sup>.

Verbesserte Approximationen (unter Berücksichtigung höherer Momente) lassen sich etwa auf Basis der Cornish-Fisher-Entwicklung gewinnen und sind auch außerhalb der versicherungsmathematischen Sphäre bekannt<sup>27</sup>.

Eine weitere Alternative der approximativen Quantilbestimmung bietet die Ausnutzung der Beziehung (2.20) für subexponentielle Schadenhöhenverteilungen. Da  $G_t(Q_{1-\alpha}) = 1 - E[N(t)] [1 - F(Q_{1-\alpha})] = 1 - \alpha$  folgt hieraus die Approximation

$$(2.22) \quad Q_{1-\alpha}[S(t)] \approx F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{E[N(t)]}\right) \quad \text{f. } \alpha \rightarrow 0.$$

Betrachten wir beispielsweise die Nullpunkt-Paretoverteilung mit

$$(2.23) \quad \bar{F}(x) = \left(\frac{b+x}{b}\right)^{-c} = \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-c} \quad \text{für } x > 0$$

als Schadenhöhenverteilung, so folgt entsprechend

$$(2.24) \quad \text{VaR}_t(\alpha) := Q_{1-\alpha}[S(t)] = b \left[ \left(\frac{E[N(t)]}{\alpha}\right)^{1/c} - 1 \right].$$

Böcker/Klüppelberg (2005) führen eine Simulationsstudie für  $b = 1$  durch und kommen zum Schluss, dass gerade für kleine  $c$  ("extremely heavy-tailed data") diese Approximation sehr gut ist.

Böcker/Klüppelberg (2005) weisen ferner nach, dass

$$(2.25) \quad \text{VaR}_t(\alpha) \sim t^{1/c} \text{VaR}_1(\alpha) \quad \text{f. } t > 0 \quad \text{und } \alpha \rightarrow 0.$$

---

<sup>26</sup> Vgl. etwa Sundt (1993, 146).

<sup>27</sup> Vgl. etwa Deutsch (2004, 421), Holton (2003, 152) oder Jaschke (2002).

Die Zeitskalierung besitzt somit in diesem Falle nicht die aus dem Gebiet der Marktrisiken bekannte Form  $\sqrt{t}$ . Für kleine  $c$  (große  $1/c$ ) wächst der Value at Risk im Paretofall somit rapide (und viel schneller als  $\sqrt{t}$ ) an<sup>28</sup>.

### 3. Operationelles Risiko

#### 3.1 Basel II und Solvency II

Der neue Baseler Eigenkapitalakkord<sup>29</sup> (kurz: Basel II) enthält eine Reihe von Ausführungen und Regelungen für das operationelle Risiko im Bankenbereich, die wir im Folgenden selektiv kurz darstellen werden. Ergänzend gehen wir auf die Sichtweise der deutschen Versicherungswirtschaft sowie der Versicherungsaufsicht im Rahmen der aktuellen Diskussion um Solvency II, d.h. der künftigen Regulierung der Kapitalanforderungen für Versicherungsunternehmen, ein<sup>30</sup>.

Beginnen wir zunächst mit der gewählten Definition des operationellen Risikos.

Definition: (Par. 644)

Operationelles Risiko ist die Gefahr von Verlusten, die in Folge der Unangemessenheit oder des Versagens von internen Verfahren, Menschen und Systemen oder in Folge externer Ereignisse eintreten.

Die im Rahmen von Basel II gewählte Definition schließt dabei Rechtsrisiken<sup>31</sup> ein, beinhaltet aber nicht strategische Risiken oder Reputationsrisiken.

---

<sup>28</sup> Im in Kapitel 3 dargestellten Kontext operationeller Risiken bringen Böcker/Klüppelberg (2005) diesen Sachverhalt folgendermaßen auf den Punkt: „To put it simply, operational risk can be a long term killer.“

<sup>29</sup> Vgl. hierzu erneut Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Abschnitt 5).

<sup>30</sup> Vgl. hierzu aktuell Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007) sowie Dölker (2006, 49 ff.).

<sup>31</sup> Rechtsrisiken beinhalten dabei unter anderem die potenzielle Verpflichtung zu Bußgeldern, Geldstrafen oder Straf(zahlung)en resultierend aus aufsichtlichen Maßnahmen oder privatrechtlichen Vereinbarungen.

Eine analoge, stärker auf die Spezifika des Versicherungsgeschäfts abstellende Definition findet man in Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007, S. 8), wobei hier von „operationalen“ Risiken gesprochen wird:

Operationale Risiken sind die Gefahr von Verlusten als Folge von Unzulänglichkeiten<sup>32</sup> oder des Versagens von Menschen, internen Prozessen oder Systemen sowie auf Grund externer Ereignisse. Rechtsrisiken sind eingeschlossen. Reputationsrisiken, Risiken aus strategischen Entscheidungen sowie die im Rahmen von Versicherungsprodukten aktiv übernommenen Risiken fallen nicht unter die operationalen Risiken.

Das operationale Risiko bildet in der Versicherungswirtschaft neben dem Kapitalanlagerisiko eine der beiden Risikokategorien, die Schaden- und Unfallversicherer sowie Lebens- und Krankenversicherer gemeinsam betreffen. Die Kalkulationsrisiken bei Lebens- und Krankenversicherern sowie das versicherungstechnische Risiko und das Rückversicherungsausfallrisiko bei Schaden- und Unfallversicherern werden dagegen spartenspezifisch betrachtet.

Die vorstehenden Definitionen beinhalten zugleich eine Kategorisierung operationeller Risiken nach den vier Ursachenkategorien technische Ursachen, Menschen, Organisation sowie externe Faktoren<sup>33</sup>.

Hinsichtlich der Messmethodik lässt Basel II des Weiteren drei methodische Ansätze zur Berechnung der Kapitalanforderungen<sup>34</sup> für operationelle Risiken zu, welche sich durch zunehmende Komplexität und Risikosensitivität auszeichnen<sup>35</sup>,

- (i) den Basisindikatoransatz
  - (ii) den Standardansatz
- oder
- (iii) ambitionierte Messansätze (Advanced Measurement Approach, AMA).

---

<sup>32</sup> Die Übersetzung des englischen Begriffs "inadequacy" durch "Unzulänglichkeit" anstelle von "Unangemessenheit" erscheint dabei sachgerecht.

<sup>33</sup> Eine weitergehende Untergliederung in Subkategorien findet man in Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007, Anlage 1).

<sup>34</sup> Neben diesen Regelungen im Hinblick auf eine Kapitalunterlegung existieren nationale bankaufsichtliche Vorschriften zur Begrenzung von operationellen Risiken, vgl. etwa Hartmann-Wendels et al. (2007, 384).

<sup>35</sup> Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 645).

Der Basisindikatoransatz<sup>36</sup> setzt in pauschaler Weise an einem gesamtbankbezogenen Indikator für das operationelle Risiko an. Der Kapitalunterlegungsbetrag ergibt sich aus der Multiplikation des durchschnittlichen jährlichen Bruttoertrags der letzten drei Jahre<sup>37</sup> mit einem vorgegebenen Prozentsatz (Alpha genannt) in Höhe von 15%. Bruttoertrag in diesem Sinne ist dabei das Zinsergebnis zuzüglich zinsunabhängiger Erträge<sup>38</sup>.

Formal gilt somit für die Kapitalanforderung im Jahr  $t$

$$(3.1) \quad RC_t^{BI} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \alpha \max(GI^{t-i}, 0),$$

wobei  $GI^{t-i}$  der Bruttoertrag (gross income) des Jahres  $t - i$ ,  $n$  die Anzahl der drei letzten Jahre mit positivem Bruttoertrag und  $\alpha = 0.15$  ist.

Der Basisindikatoransatz beruht somit auf einer einfachen und pauschalen volumenbasierten Messvorschrift.

Eine verwandte Vorgehensweise ist in dem vor dem Hintergrund von Solvency II vom Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft in Zusammenarbeit mit der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht entwickelten sogenannten Standardmodell vorgesehen<sup>39</sup>, das in dieser Form auch vom Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) im Rahmen der Quantitative Impact Study (QIS) 2 verwendet worden ist. Dabei wird die Solvenzkapitalanforderung für das operationelle Risiko als Maximum eines Prozentsatzes  $x$  der verdienten Bruttobeiträge und eines Prozentsatzes  $y$  der versicherungstechnischen Rückstellungen ermittelt, wobei der Faktor  $x(y)$  in der Lebensversicherung 6% (0.6%), in der Krankenversicherung 3% (0.3%) und in der Schaden/Unfallversicherung<sup>40</sup> 3% (3%) beträgt.

---

<sup>36</sup> Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 649 ff.).

<sup>37</sup> Wobei nur Jahre mit einem positiven Bruttoertrag berücksichtigt werden.

<sup>38</sup> Definiert durch die nationale Bankenaufsicht und/oder die nationalen Rechnungslegungsstandards.

<sup>39</sup> Vgl. hierzu etwa Dölker (2006, 53, Fußnote 166).

<sup>40</sup> In der Schaden/Unfall-Versicherung werden dabei die versicherungstechnischen Rückstellungen auf die Bruttoschadenrückstellungen eingeschränkt.

Als Maßstab für die Kapitalanforderung fungiert damit als sogenannter Risikoträger ein Maß für die Größe des Geschäfts. Jüngere Überlegungen<sup>41</sup> verwenden das Gesamt-SCR (Solvency Capital Requirement) als Risikoträger, wodurch gutes Risikomanagement tendenziell belohnt wird, und nicht mehr die Größe des Geschäfts sondern ein Maßstab für das Risiko des Geschäfts das für das operationelle Risiko zusätzliche Kapitalerfordernis festlegt.

Kommen wir damit zurück zum Bankenfall und hier zum Standardansatz. Im Rahmen dieses Ansatzes werden zunächst die Aktivitäten der Bank acht aufsichtlich definierten Geschäftsfeldern zugeordnet. Es sind dies<sup>42 43</sup>: Unternehmensfinanzierung-/beratung (Corporate Finance), Handel (Trading & Sales), Privatkundengeschäft (Retail Banking), Firmenkundengeschäft (Commercial Banking), Zahlungsverkehr und Wertpapierabwicklung, Depot- und Treuhandgeschäfte (Agency Services), Vermögensverwaltung und Wertpapierprovisionsgeschäft.

Für jedes dieser Geschäftsfelder ergibt sich dann der Kapitalunterlegungsbetrag aus der Multiplikation des durchschnittlichen jährlichen Bruttoertrags des jeweiligen Geschäftsfelds mit einem aufsichtlich vorgegebenen Prozentsatz (Betafaktoren<sup>44</sup> genannt, je nach Geschäftsfeld in einem Bereich<sup>45</sup> zwischen 12% und 18%). Die Gesamtkapitalanforderung wird dann als Drei-Jahres-Durchschnitt der regulatorischen Kapitalanforderungen für die einzelnen Geschäftsfelder in jedem Jahr errechnet. Dabei können aber negative Kapitalanforderungen in einzelnen Geschäftsfeldern, die aus negativen Bruttoerträgen resultieren, mit positiven Kapitalanforderungen in andern Geschäftsfeldern zur Gänze verrechnet werden<sup>46</sup>. Ist jedoch die aggregierte Kapitalanforderung eines Jahres negativ, so ist für dieses Jahr die Gesamtkapitalanforderung auf null zu setzen. Formal ergibt sich daher die Gesamtkapitalanforderung im Jahr  $t$  zu

---

<sup>41</sup> Vgl. hierzu Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007, 14 f.).

<sup>42</sup> Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 652 und Anhang 6).

<sup>43</sup> Für eine entsprechende versicherungszweigbasierte Systematisierung von Geschäftsfeldern im Versicherungsbereich vgl. Dölker (2006, 66).

<sup>44</sup> Die Betafaktoren dienen als Näherungswert für das Verhältnis zwischen branchenweiten operationellen Verlusten und den branchenweit aggregierten Bruttoerträgen für das jeweilige Geschäftsfeld. Zu einer kritischen Analyse der Betafaktoren aus empirischer Sicht vgl. Moscadelli (2004).

<sup>45</sup> Für Details vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 654).

<sup>46</sup> Im Rahmen eines nationalen Wahlrechts können hier strengere Anforderungen gestellt werden.

$$(3.2) \quad RC_t^{SA} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \left[ \max \left\{ \sum_{j=1}^8 \beta_j GI_j^{t-i}, 0 \right\} \right],$$

wobei  $GI_j^{t-i}$  der Bruttoertrag des Geschäftsfelds  $j$  im Jahr  $t-i$ ,  $\beta_j$  der Betafaktor des Geschäftsfelds  $j$  und  $n$  die Anzahl der Jahre mit positiver aggregierter Kapitalanforderung ist.

Alternativ kann die nationale Aufsichtsbehörde einer Bank gestatten, den Alternativen Standardansatz zu wählen. Abweichungen von dem Standardansatz bestehen dabei nur in den Geschäftsfeldern Privatkunden und Firmenkunden. Bei diesen wird anstelle des Bruttoertrags das ausstehende Kreditvolumen als Maßgröße genommen und dieses mit einem Faktor von  $m = 0.035$  multipliziert, um den Kapitalunterlegungsbetrag zu ermitteln<sup>47</sup>.

Im Kontext der deutschen Versicherungswirtschaft wird eine solche Vorgehensweise nicht als gangbarer Weg angesehen<sup>48</sup>.

Im Unterschied zum Basisindikatoransatz erfolgt beim Standardansatz und beim Alternativen Standardansatz eine geschäftsfeldbezogene Differenzierung der notwendigen Kapitalunterlegung. Die geschäftsfeldbezogene Kapitalermittlung erfolgt jedoch nach wie vor in einer pauschalen Weise.

Indikatorbasierte Verfahren beinhalten aufgrund ihrer mangelnden Sensitivität bezüglich der geschäftsinhärenten operationellen Risiken nur wenig Anreiz für ein gutes Management dieser Risiken. Die Unternehmen werden aufgrund reiner volumenbasierter Maßstäbe, unabhängig von ihrem tatsächlichen operationellen Risiko, durch Eigenmittelanforderungen belastet. Erst bei Verwendung eines internen Risikomodells kann diese Problematik beseitigt werden.

Wenden wir uns damit den ambitionierten Messansätzen (AMA) zu. Diese basieren im Unterschied zum Basisindikatoransatz und zum Standardansatz nicht auf einer vorgegebenen formelmäßigen Kapitalbestimmung, sondern auf einem zu entwickelnden bankinternen Modell sowie einem damit verbundenen Messsystem für operationelle Risiken, vergleichbar mit in-

---

<sup>47</sup> Zu weiteren Details des Alternativen Standardansatzes vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Fußnote 98).

<sup>48</sup> Vgl. hierzu Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007, 16 f.).



ternen Modellen für Markt- und Kreditrisiken. Entsprechend spezifiziert Basel II nur grundsätzliche Anforderungen an den AMA, auf die wir im Folgenden selektiv eingehen werden.

Par 667:

Das vorgegebene Konfidenzniveau beträgt 99.9% ( $\alpha = 0.001$ ) auf Jahresbasis. Eine Bank muss nachweisen können, dass ihr Ansatz auch die potenziell schwerwiegenden Verlustereignisse am oberen Rand der angenommenen Verteilung abbildet.

Par. 669:

... Zum Beispiel kann passieren, dass Schätzungen des 99.9%-Konfidenzintervalls, die im Wesentlichen auf internen und externen Verlustdaten basieren, in Geschäftsfeldern mit ausgeprägtem Randbereich ("heavy tail") und einer kleinen Anzahl beobachteter Verluste ungeeignet wären. In solchen Fällen können Szenarioanalysen ... eine beherrschende Rolle spielen. Umgekehrt können operationelle Verlustdaten eine dominantere Rolle in Risikomesssystemen in den Geschäftsfeldern spielen, in denen die ... auf diesen Daten basierenden Schätzungen des 99.9% Konfidenzintervalls als verlässlich erachtet werden.

Par. 665:

Das interne Messsystem muss ... in der Lage sein, unerwartete Verluste basierend auf einer Kombination von internen und aussagekräftigen externen Verlustdaten, Szenarioanalysen, bankspezifischem Geschäftsumfeld und internen Kontrollfaktoren angemessen zu schätzen. Zusätzlich muss das von der Bank benutzte Messverfahren die Allokation von ökonomischem Kapital für operationelle Risiken über alle Geschäftsfelder in einer Weise unterstützend ermöglichen, die Anreize zur Verbesserung des operationellen Risikomanagements auf Geschäftsfeldebene bietet.

Darüber hinaus nimmt Basel II<sup>49</sup> eine Aufgliederung der operationellen Risiken in bestimmte Kategorien für Verlustereignisse vor, die im Rahmen des AMA vom bankinternen Messsystem erfasst werden müssen. Unterschieden werden hierbei sieben Ereigniskategorien (Interner Betrug; externer Betrug; Beschäftigungspraxis und Arbeitsplatzsicherheit; Kunden, Produkte

---

<sup>49</sup> Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 669, Punkt a)) in Verbindung mit Anhang 7.

und Geschäftsgepflogenheiten; Sachschäden; Geschäftsunterbrechungen und Systemausfälle; Abwicklung, Vertrieb und Prozessmanagement), die ihrerseits weiter untergliedert werden<sup>50</sup>.

Des Weiteren enthält Basel II noch Anforderungen im Hinblick auf die Aggregation von Risikokapitalien einzelner Segmente von operationellen Risiken. Hierzu wird im Einzelnen ausgeführt<sup>51</sup>:

„Risikomessungen der unterschiedlichen Schätzer für operationelle Risiken müssen zur Bestimmung der aufsichtsrechtlichen Mindestkapitalanforderungen addiert werden. Gleichwohl ... kann gestattet werden, intern abgeleitete Korrelationen der operationellen Risiken zu berücksichtigen ... Die Bank muss ihre Korrelationsannahmen validieren, wobei angemessene quantitative und qualitative Techniken zu verwenden sind.“

Basel II geht somit von der Annahme aus, dass eine Addition der Risikokapitalien der einzelnen Risikozellen (d.h. der unterschiedlichen Kombinationen aus Geschäftsfeldern und Ereigniskategorien), eine konservative Abschätzung für das insgesamt notwendige Risikokapital darstellt. Äquivalent hierzu ist offenbar die Annahme der Subadditivität der operationellen Risiken hinsichtlich des im Rahmen von Basel II verwendeten Risikomaßes Value at Risk. Dies ist jedoch nicht notwendigerweise der Fall. Neslehova et al. (2006) weisen darauf hin, dass beispielsweise bei Annahme einer Paretoverteilung mit unendlich großem Erwartungswert<sup>52</sup> der Value at Risk (sogar im Falle unabhängiger Risiken) superadditiv ist.

Kommen wir damit schließlich zum zentralen Gegenstand unserer Ausführungen, dem Loss Distribution Approach (LDA). Dieser ist als ein konkreter systematischer Ansatz innerhalb des AMA zu sehen. Zum LDA finden sich in Basel Committee on Banking Supervision (2001, Appendix 6) die folgenden näheren Ausführungen:

„Under the Loss Distribution Approach, the bank estimates, for each business line/risk type cell, the probability distribution functions of the single event impact and the event frequency

---

<sup>50</sup> Eine alternative Untergliederung für den Versicherungsbereich enthält Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (2007, Anlage 2).

<sup>51</sup> Vgl. Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004, Par. 669, Punkt d)).

<sup>52</sup> Ob dies ein praxisrelevanter Fall ist, sei an dieser Stelle dahingestellt. Wir greifen diese Diskussion in Abschnitt 3.2 wieder auf. An dieser Stelle geht es primär um die nicht vorhandene Allgemeingültigkeit der Subadditivität.

for the next (one) year using its internal data, and computes the probability distribution function for the cumulative operational loss.”

Pro fixierter Risikozelle läuft der LDA<sup>53</sup> somit auf das kollektive Modell der Risikotheorie für  $t = 1$  (zusammengesetzte Verteilung) hinaus.

Im Weiteren konzentrieren wir uns auf den LDA. Nicht jede Risikoart ist aber genügend gut quantifizierbar (z.B. Rechtsrisiken), um den LDA in sinnvoller Weise einsetzen zu können. Ein weiterer kritischer Punkt ist, ob die Anzahl der zur Verfügung stehenden Daten ausreichend ist, um die Verteilung oder auch nur bestimmte Quantile der Verlusthöhe glaubwürdig bestimmen zu können. Auf diese Probleme spielt Paul Embrechts (2005) mit der Wahl des Vortragstitels "How to Model Operational Risk, if you must" an.

### 3.2 Loss Distribution Approach: Univariate Modelle

Im Folgenden fixieren wir typischerweise eine Zeitperiode sowie eine Risikozelle des Geschäftsfeld/Ereigniskategorie-Typus gemäß Basel II für ein Unternehmen (Bank) und wenden auf dieses Segment den LDA an. Alternativ kann man auch gepoolte Daten<sup>54</sup>, d.h. unterschiedliche Gruppierungen der Originaldaten, oder aber die Gesamtheit der Realisierungen operationeller Risiken eines Unternehmens betrachten<sup>55</sup>. Alternativ zu dieser statischen Version des LDA auf der Basis der Gesamtschadenverteilung gemäß (2.1b) kann man auch die dynamische Variante auf der Basis des Gesamtschadenprozesses (2.1a) betrachten.

Die Umsetzung des Modells der kollektiven Risikotheorie erfordert zunächst sowohl die Spezifikation der Schadenzahlverteilung bzw. des Schadenzahlprozesses (hier: Verteilung der Anzahl operationeller Verluste) als auch der Schadenhöhenverteilung (hier: Verteilung der Höhen operationeller Verluste). Zur Identifikation der für eine Quantifizierung operationeller Risiken angemessenen Schadenzahl- bzw. Schadenhöhenverteilungen wurden mittlerweile

---

<sup>53</sup> Zum LDA vgl. vor allem Cruz (2002), Frachot et al. (2001, 2003), Nyström/Skoglund (2001), McNeil et al. (2005, Abschnitt 10.1.3) sowie Panjer (2006).

<sup>54</sup> So poolt beispielsweise Moscadelli (2004) die Daten unterschiedlicher Banken im Hinblick auf verschiedene Geschäftsfelder, d.h. die Datengruppierung erfolgt einerseits über verschiedene Ereigniskategorien und andererseits über verschiedene Banken.

<sup>55</sup> So analysieren etwa Dutta/Perry (2006) den LDA sowohl auf der Risikozellenebene als auch auf der Unternehmensebene.

eine Vielzahl empirischer Studien durchgeführt<sup>56</sup>. Auf Basis dieser Studien ergeben sich nach McNeil et al. (2005, S.469) die folgenden „stylized facts“:

- (1) Loss severities have a heavy-tailed distribution
- (2) Losses occur randomly in time
- (3) Loss frequency may vary substantially in time.

Punkt (3) deutet darauf hin, dass neben den in der Literatur betrachteten Standardannahmen eines homogenen oder gemischten Poissonprozesses (bzw. einer Poisson- oder etwa einer Negativen Binomialverteilung in der statischen Variante) beispielsweise inhomogene Poissonprozesse mit einer zeitvariablen Intensitätsfunktion von Interesse sind<sup>57</sup>.

Hinsichtlich der Schadenhöhenverteilung betrachten Moscadelli (2004) und De Fontnouvelle et al. (2004) zunächst eine Vielzahl von Schadenhöhenverteilungen (im Überblick: Exponential-, Gamma-, Weibull-, Gumbel-, Lognormal-, Loggamma-, Loglogistic-, Pareto- und Burr-Verteilung). Beide Untersuchungen kommen jedoch zum Schluss, dass keine einzelne dieser Verteilungen die Schadenhöhenrealisationen (realisierte Höhen operationeller Verluste) in ihrem gesamten Spektrum, d.h. sowohl im Low/Medium-Severity-Bereich als auch im High Severity-Bereich, angemessen abbilden kann<sup>58</sup>.

Um die Gefährlichkeit operationaler Verlusthöhen angemessen erfassen zu können, approximieren daher Moscadelli (2004) und de Fontnouvelle et al. (2004), gestützt auf Ergebnisse (Balkema/de Haan/Pickands-Theorem<sup>59</sup>) der Extremwerttheorie (EVT), die Verteilungsenden der empirischen Verlustverteilung – präzise: den Tail der Verlustverteilung jenseits eines jeweils noch festzulegenden Schwellenwerts – durch die verallgemeinerte Paretoverteilung mit der Verteilungsfunktion

---

<sup>56</sup> Extensive Studien wurden u.a. vorgelegt von De Fontnouvelle et al. (2004), Moscadelli (2004), Dölker (2006) sowie von Dutta/Perry (2006).

<sup>57</sup> Anwendungen hierzu finden sich etwa in Chavez-Demoulin et al. (2004, 2006).

<sup>58</sup> So führt etwa Moscadelli (2004, 64) aus „the results of the conventional inference support the hypothesis that ... the small/medium-sized operational risk data (i.e. the body of the loss distribution) have a different statistical ‘soul’ than the tail data“ und de Fontnouvelle et al. (2004, 16) schließen “that it may be difficult to fit parametric loss severity distributions over the entire range of loss amounts”.

<sup>59</sup> Vgl. etwa Borkovec/Klüppelberg (2000) oder McNeil (2000).

$$(3.3) \quad \text{GPD}(x; \xi, \beta) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta) & \xi \neq 0 \\ \exp(-x / \beta) & \xi = 0. \end{cases}$$

Die verallgemeinerte Paretoverteilung gehört dabei für  $\xi > 0$  zu den „besonders gefährlichen“ subexponentiellen Verteilungen<sup>60</sup>. Insbesondere sind die Momente  $E(X^k)$  für  $\alpha = 1/\xi < k$  nicht mehr endlich groß.

Die von Moscadelli (2004) geschätzten Tailparameter liegen im Bereich von  $\xi = 0.85$  (Geschäftsbereich Vermögensverwaltung) bis  $\xi = 1.39$  (Geschäftsbereich Firmenkundengeschäft). Alle Geschäftsbereiche führen damit auf eine Verteilung mit unendlicher Varianz ( $\xi > 0.5$ ) und sechs Geschäftsbereiche sogar auf eine Verteilung mit unendlichem Erwartungswert ( $\xi > 1$ ). Moscadelli (und auch andere) folgern hieraus eine extreme Gefährlichkeit operationaler Verlusthöhen. Angesichts dieser exorbitant hohen Werte (die sich entsprechend auch in außerordentlichen Höhen des notwendigen Risikokapitals niederschlagen) erscheint es uns allerdings plausibler zu vermuten, dass ein im Hinblick auf den Prozess der Datengenerierung inadäquates Modell zur Anwendung gekommen ist. In der Tat hält die Extremwerttheorie einige Fallstricke (unter anderem die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Schadenhöhen) bereit<sup>61</sup>. Problematisch ist auch, dass die statistische Inferenz ausschließlich auf (stark zufallsbeeinflussten) Daten jenseits der gewählten Schwelle basiert, d.h. die kleinen und mittleren Schäden (Verlusthöhen) werden nicht angemessen berücksichtigt. Dies beinhaltet die Gefahr einer Überschätzung der Gefährlichkeit der Verteilung operationeller Verluste (bzw. allgemein der Schadenhöhenverteilung).

Auch einer der prominentesten Vertreter der Extremwerttheorie, Paul Embrechts, weist darauf hin<sup>62</sup>, dass „traditional modelling approaches, including extreme value theory, reach their limits as the structure of operational loss data is barely in line with the modelling assumptions“ und präsentiert<sup>63</sup> Beispiele von datengenerierenden Prozessen, bei deren Datenanalyse extremwerttheoretische Methoden – da sie eben nur auf einem Teil der Daten ansetzen – zu der Einschätzung gelangen können, dass (beispielsweise) ein unendlich großer Erwartungswert vorliegt, obwohl dies für den zugrunde liegenden Zufallsmechanismus nicht gilt.

---

<sup>60</sup> Es sei an dieser Stelle nochmals auf den Anhang verwiesen.

<sup>61</sup> Vgl. hierzu etwa Diebold et al. (2000).

<sup>62</sup> Vgl. Embrechts et al. (2003, 217).

<sup>63</sup> In Neslehova/Embrechts/Chavez-Demoulin (2006).

Die vorstehende Diskussion belegt nachdrücklich den Bedarf<sup>64</sup> und die Notwendigkeit, alternativ zum Einsatz der Extremwerttheorie parametrische Verteilungen zu identifizieren, die den gesamten Wertebereich<sup>65</sup> angemessen repräsentieren können, d.h. sowohl für die kleinen, mittleren als auch großen bis sehr großen Realisierungen operationeller Verlusthöhen eine hohe Anpassungsgüte (Fit) beinhalten.

Einen ersten Durchbruch im Hinblick auf den vorstehend dargelegten Bedarf stellt die Arbeit von Dutta/Perry (2006) dar. Die Autoren verwenden neben den schon in früheren Analysen untersuchten Verlusthöhenverteilungen und dem extremwerttheoretischen Ansatz erstmals zwei Vier-Parameter-Verteilungen, die verallgemeinerte Betaverteilung zweiter Art sowie die GH-Verteilung. Die GH-Verteilung gehört zu einer Familie von Transformationen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $Z \sim N(0,1)$ , die im Rahmen der auf Tuckey (1960, 1977) zurückgehenden explorativen Datenanalyse entwickelt worden sind<sup>66</sup>. Eine Zufallsvariable  $X$  hat dabei eine GH-Verteilung,  $X \sim GH$ , mit den reellwertigen Parametern<sup>67</sup>  $a$ ,  $b$ ,  $g$  und  $h \geq 0$ , falls für  $Z \sim N(0,1)$

$$(3.4a) \quad X = a + b k(Z),$$

wobei

$$(3.4b) \quad k(x) = \begin{cases} \frac{e^{gx} - 1}{g} e^{hx^2/2} & g \neq 0 \\ x e^{hx^2/2} & g = 0 \end{cases}.$$

---

<sup>64</sup> Diesen Bedarf betonen – wenn auch in anderen Anwendungskontexten (Versicherungsschäden bzw. Hedgefondsdaten) – auch Beirlant et al. (2001, 54) sowie Kassberger/Kiesel (2006, 473).

<sup>65</sup> Die Verwendung der verallgemeinerten Paretoverteilung zur Repräsentation operationeller Verlusthöhen jenseits eines Schwellenwerts hat eine weitere unliebsame Konsequenz. Zur Ermittlung des notwendigen Risikokapitals auf der Basis von (2.1), etwa im Rahmen einer Monte Carlo-Simulation, benötigt man die Schadenhöhenverteilung auf ihrem gesamten Wertebereich. Man ist daher gezwungen, die Schadenhöhenverteilung als Kombination einer Verteilung für kleine/mittlere Schadenhöhen (Verlusthöhen bis zum Schwellenwert) und einer verallgemeinerten Paretoverteilung zu konstruieren, vgl. hierzu etwa Nguyen/Ostmann (2005, 45). Formal führt dies auf den Ansatz gespleißter Verteilungen (splicing distributions), vgl. hierzu etwa Klugman et al. (2004, 64 f.).

<sup>66</sup> Eine eingehende Analyse der GH-Verteilung bietet insbesondere Hoaglin (1983).

<sup>67</sup> Allgemeiner können die Parameter  $g$  und  $h$  auch Polynome in  $Z^2$  sein. Für einige wenige Geschäftsfelder bzw. Banken verwenden beispielsweise Dutta/Perry (2006) für  $h$  ein Polynom 3. Grades (was natürlich die Parameteranzahl deutlich erhöht). Mills (1995) verwendet – in einem anderen Finanzmarktcontext – für  $g$  und  $h$  Polynome 2. Grades.

Die Parameter  $g$  bzw.  $h$  steuern dabei die Schiefe bzw. die Kurtosis (und damit die heavy-tailedness) der Verteilung.

Dutta/Perry (2006) analysieren Daten operationeller Verlusthöhen sowohl auf der Ebene der Geschäftsfelder und der Ereigniskategorien gemäß Basel II als auch auf der Gesamtbankebene. Nach ihren Analysen führt die Verwendung der verallgemeinerten Paretoverteilung zur Approximation der Verteilungsenden der Verlusthöhenverteilung auf der einen Seite zwar zu einer guten Anpassung, auf der anderen Seite jedoch zu unrealistisch hohen, sehr sensitiv auf die Wahl des Schwellenwerts reagierende und nicht zwischen Geschäftsfeldern, Ereigniskategorien und Banken konsistenten Werten für das notwendige Risikokapital. Die Untersuchung von Dutta/Perry (2006) bestätigt damit nochmals nachdrücklich die vorstehend dargelegten Probleme der Anwendung der Extremwerttheorie auf die Analyse operationeller Risiken.

Demgegenüber erbrachte die Anwendung der GH-Verteilung sowohl einen sehr guten Fit über den gesamten Realisationsbereich operationeller Verlusthöhen als auch plausible und konsistente Risikokapitalwerte. Damit erweist sich die GH-Verteilung als ein erster natürlicher Kandidat für eine Benchmark-Verlusthöhenverteilung im Bereich operationeller Risiken.

Der Grund für die hohe Anpassungsgüte<sup>68</sup> der GH-Verteilung liegt darin, dass sie durch geeignete Parameterwahl eine sehr große Varietät von Verteilungen approximieren kann, wie Martinez/Iglewicz (1984) zeigen. Dies gilt auch für gefährliche Verteilungen. Degen et al. (2006) weisen in diesem Kontext insbesondere nach, dass die GH-Verteilung für  $g > 0$  und  $h \geq 0$  zu der Familie der subexponentiellen Verteilungen gehört, im Falle  $h > 0$  sogar zu den „besonders gefährlichen“ Vertretern, man vgl. hierzu jeweils den Anhang. Ferner weisen Degen et al. nach, dass, wenn die Verlusthöhenverteilung gut durch eine GH-Verteilung repräsentiert wird, dann die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die verallgemeinerte Paretoverteilung außerordentlich gering ist. Dies liefert zugleich auf der theoretischen Ebene eine befriedigende Erklärung für die vorstehend konstatierten Probleme bei der Anwendung der EVT auf den Bereich der operationellen Risiken.

Damit ist die Diskussion um die optimale Wahl einer Verlusthöhenverteilung für operationelle Risiken sicherlich noch nicht abgeschlossen. Zum einen weist auch die GH-Verteilung ei-

---

<sup>68</sup> Auch im Bereich anderer Finanzmarktanwendungen finden sich Beispiele für eine hohe Anpassungsgüte der GH-Verteilung bzw. weiterer Verteilungen der Tuckey-Familie. Man vgl. hierzu etwa Badrinath/Chatterjee (1991), Dutta/Babbel (2005), Mills (1995) sowie Fischer et al. (2003).

nige Probleme auf<sup>69</sup>, zum anderen existieren weitere Schadenhöhen- bzw. Verlustverteilungen, die in anderen Anwendungsfeldern diskutiert werden und ebenfalls darauf abzielen, den gesamten Bereich der Schaden- bzw. Verlusthöhenverteilung adäquat zu repräsentieren. Hierzu gehört die verallgemeinerte Burr-Gamma-Verteilung, die für den Bereich der Schadenversicherung von Beirlant et al. (2001) vorgeschlagen wurde, die Normal Inverse Gauss-Verteilung, die im Bereich der Analyse von Hedgefonds-Daten<sup>70</sup> und dem Pricing von Collateralized Debt Obligations<sup>71</sup> (CDOs) aktuell mit Erfolg eingesetzt wird sowie die schiefe verallgemeinerte t-Verteilung 2. Art, die ebenfalls bei der Analyse von Finanzmarktdaten eingesetzt wird<sup>72</sup>.

Legt man allerdings – wie beispielsweise Dutta/Perry (2006) dies tun – nicht nur Kriterien wie hohe Anpassungsgüte und Flexibilität zugrunde, sondern auch Simplizität, d.h. eine einfache Anwendungsmöglichkeit in praxi (statistische Identifikation und Monte Carlo-Simulation), so kommt man doch wieder auf die GH-Verteilung als relativ einfache<sup>73</sup> Transformation der Standardnormalverteilung zurück.

Soweit zu unserer (etwas extensiveren) Diskussion über die Wahl einer geeigneten Verlusthöhenverteilung für operationelle Risiken.

Die abschließende Auswertung (inklusive Quantilbestimmung) der Gesamtschadenverteilung (des Gesamtschadenprozesses), gegeben die Schadenzahlverteilung (den Schadenzahlprozess) und die Schadenhöhenverteilung, erfolgt in der Literatur zu operationellen Risiken weit überwiegend im Wege einer Monte Carlo-Simulation.

Alternativ hierzu kann man die in Abschnitt 2.6 dargestellte Quantilapproximation (2.22) – bzw. im Falle der Paretoverteilung (2.24) – für subexponentielle Verlusthöhenverteilungen anwenden. Dies wird von Böcker/Klüppelberg (2005) vorgeschlagen. Eine genauere Analyse der Güte dieser Approximation im Kontext empirischer Anwendungen steht jedoch noch aus.

---

<sup>69</sup> Zum einen kann die GH-Verteilung negative Werte annehmen, was inkonsistent zu einer Verlusthöhenverteilung ist. Zum anderen liefern Degen et al. (2006) Hinweise, die darauf hindeuten, dass in bestimmten (realistischen) Parameterbereichen die GH-Verteilung zu nicht subadditiven Value at Risk-Werten führt.

<sup>70</sup> Vgl. Kassberger/Kiesel (2006).

<sup>71</sup> Vgl. Kalemanova et al. (2007).

<sup>72</sup> Vgl. etwa Grottko (2007) und Fischer et al. (2003).

<sup>73</sup> Insbesondere ist die Funktion  $k(x)$  gemäß (3.2b) für  $h > 0$  streng monoton steigend und damit invertierbar.



### 3.3 Loss Distribution Approach: Multivariate Modelle

Basel II erlaubt – alternativ zur Addition der Risikokapitalien der einzelnen Risikozellen (Geschäftsfeld/Ereigniskategorien) – den Ansatz von "Korrelationen". Zur Korrelationsproblematik im Kontext operationeller Risiken bzw. allgemeiner zur Modellierung von Abhängigkeiten auf der Basis von Copulas vgl. etwa Böcker/Kluppelberg (2006, 2007), Chavez-Demoulin et al. (2006), Embrechts/Puccetti (2006) sowie Frachot et al. (2004).

Böcker/Kluppelberg (2007) weisen darauf hin, dass Standard-Copula-Ansätze problematisch sind, da die zugrunde liegenden Verlustprozesse (zumindest im HPP-Fall) Lévy-Prozesse sind und verwenden Lévy-Copulas zur simultanen Modellierung der operationellen Verlustanzahlen und Verlusthöhen.

Böcker/Kluppelberg (2007) weisen ferner nach, dass bei den in praxi gängigen Modellansätzen, bei denen nur die Abhängigkeiten der Schadenzahlen in den verschiedenen Zellen via Korrelation oder Copulas modelliert werden, unterschiedliche Korrelationshöhen bzw. Copulas nicht zu wesentlich unterschiedlichen Risikokapitalanforderungen führen. Dies liefert somit eine theoretische Begründung für entsprechende Erfahrungen in der Praxis<sup>74</sup>.

Andererseits kommen Dutta/Perry (2006) unter Verwendung der GH-Verteilung als Verlusthöhenverteilung auf Basis der von ihnen berechneten Risikokapitalien einmal im unkorrelierten Fall und einmal bei Summation über die Risikokapitalien pro Zelle zum Schluss, dass diese sich nicht wesentlich unterscheiden.

Alternativen zur Standardvorgehensweise bei Basel II erfordern aber auf jeden Fall sehr komplexe Modellansätze.

## 4 Schlussbemerkungen

Im Rahmen der vorliegenden Ausarbeitung wurden zunächst die konstitutiven Elemente der kollektiven Risikotheorie, der Schadenzahlprozess, die Schadenhöhenverteilung sowie der Gesamtschadenprozess eingehend erläutert. Besonderes Augenmerk wurde dann auf die Aus-

---

<sup>74</sup> Vgl. etwa Aue/Kalkbrener (2006).

wertung der Gesamtschadenverteilung, insbesondere die Bestimmung des Value at Risk gelegt.

Im Rahmen interner Modelle des operationellen Risikos lässt sich der Ansatz der kollektiven Risikotheorie zumindest im Grundsatz nahtlos übertragen (Loss Distribution Approach). Neuere Erkenntnisse im Rahmen des Loss Distribution Approach, dies betrifft beispielsweise die Modellierung der Schadenhöhenverteilung durch GH-Verteilungen oder multivariate Ansätze, lassen sich ihrerseits wiederum auf die Modellierung im Versicherungskontext übertragen.

### Anhang: Gefährliche Verteilungen

Einfache Indikatoren für das Vorliegen einer gefährlichen Verteilung einer Schadenhöhe  $X$  beinhalten die Funktionalparameter Schiefe

$$(A.1) \quad \gamma(X) = \frac{E[(X - E(X))^3]}{\sigma(X)^3}$$

und Kurtosis

$$(A.2) \quad \kappa(X) = \frac{E[(X - E(X))^4]}{\sigma(X)^4}.$$

Bei rechts- bzw. linksschiefen Verteilungen liegt mehr Masse rechts bzw. links vom Erwartungswert als bei der Normalverteilung ( $\gamma = 0$ ).

Substanzielle Rechtsschiefe bei Verlustverteilungen ist ein erster Indikator für Gefährlichkeit (so weist etwa die nicht gefährliche Exponentialverteilung eine Schiefe in Höhe von  $\gamma = 2$  auf).

Die Normalverteilung besitzt eine Kurtosis von drei bzw. eine Exzess-Kurtosis  $\kappa(X) - 3$  von null. Bei höherer Excesskurtosis befindet sich mehr Masse an den Verteilungsenden und weniger Masse in der Verteilungsmitte als bei Normalverteilung. Dies wird in Abbildung A.1 illustriert<sup>75</sup>.

---

<sup>75</sup> In Anlehnung an Rachev et al. (2005, 55).

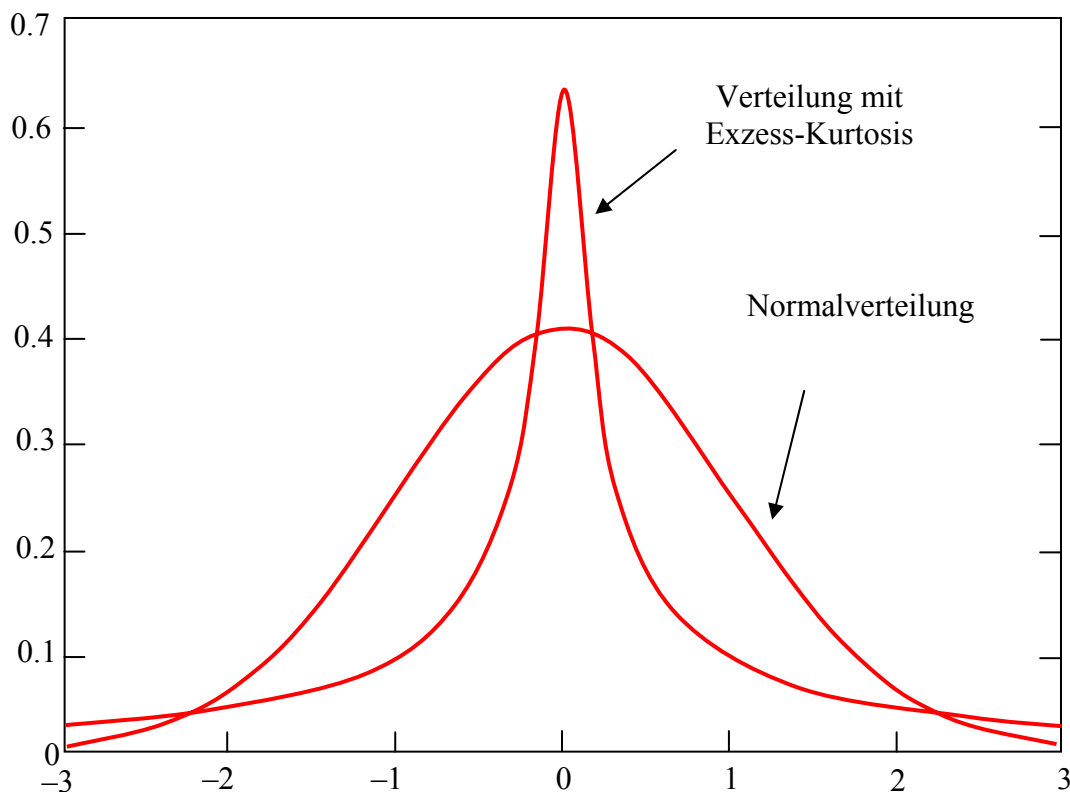


Abbildung A.1: Exzess-Kurtosis relativ zur Normalverteilung

Beispielsweise ist die t-Verteilung symmetrisch wie die Normalverteilung, besitzt aber eine höhere Kurtosis. Sie ist daher gefährlicher als die Normalverteilung. Andererseits besitzt die Exponentialverteilung eine Exzess-Kurtosis von 6 und gilt als wenig gefährlich. Hieraus ist das Fazit zu ziehen, dass Schiefe und Kurtosis alleine zur Beurteilung der Gefährlichkeit einer Verteilung nicht ausreichen und weitergehende Analysen daher erforderlich sind. Ein erster diesbezüglicher Ansatz besteht in der Betrachtung der Mean Excess Loss-Funktion.

Wir definieren hierzu für die (zufallsabhängige) Schadenhöhe  $X$  die Größe

$$(A.3) \quad \text{MEL}(u) = \text{MEL}(u; X) = E(X - u \mid X > u)$$

Diese Größe quantifiziert die mittlere Höhe der Überschreitung der vorgegebenen Verlusthöhe (threshold)  $u$ , gegeben (bedingt), dass  $u$  überschritten wird. Die Größe MEL wird als *Mean Excess* oder *Mean Excess Loss* bezeichnet. Lässt man  $u$  variieren, so spricht man von *Mean Excess Function* bzw. *Mean Excess Loss Function*.

Der MEL bietet nun eine einfache Möglichkeit zur Unterscheidung von Light-, Medium- und Heavy Tailed-Verteilungen (kurz: LT-, MT- und HT-Verteilungen). Man betrachtet dabei den Grenzwert MEL ( $\infty$ ) von MEL( $u$ ) für  $u \rightarrow \infty$ . Es gilt dann:

$$(A.4) \quad X \text{ ist } \begin{cases} \text{LT} \\ \text{MT} \\ \text{HT} \end{cases} \Leftrightarrow \text{MEL}(\infty) = \begin{cases} 0 \\ \text{const.} \\ \infty \end{cases}$$

Für eine Reihe von Verteilungen enthält Mikosch (2004, 96) die entsprechenden MLE-Funktionen. Diese werden in Anlehnung an Mikosch (2004, Figure 3.2.8) in Abbildung A.2 illustriert<sup>76</sup>.

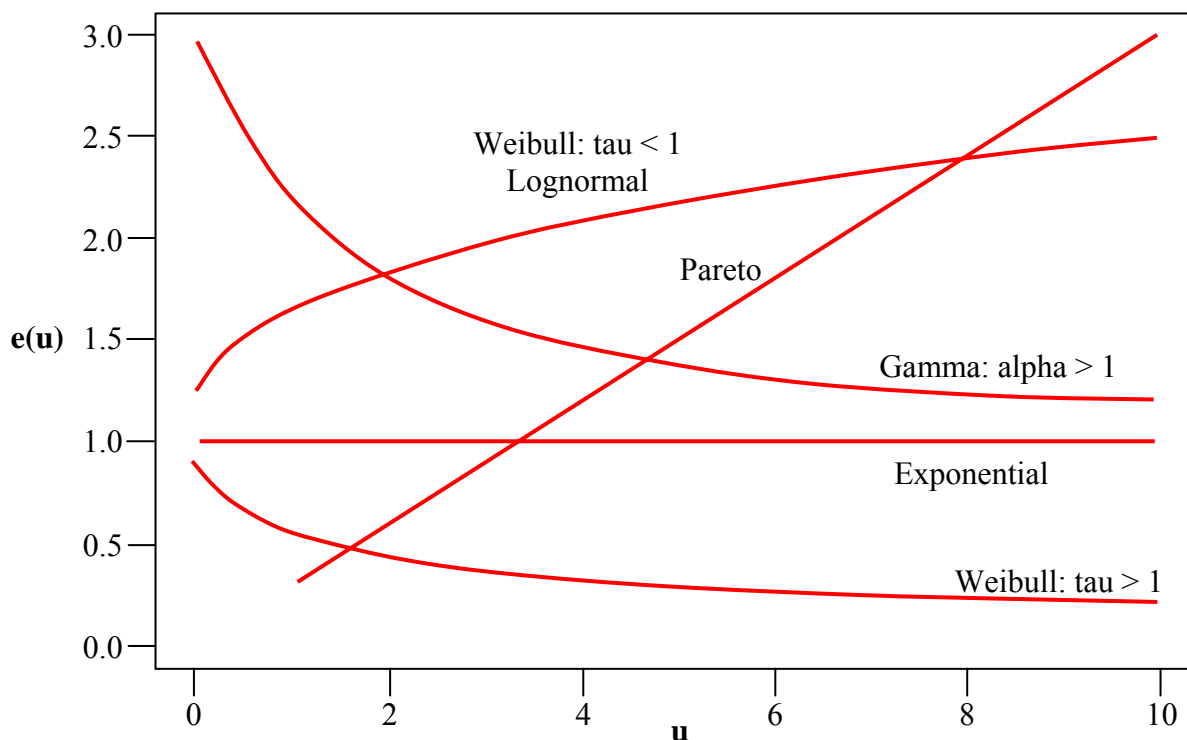


Abbildung A.2: Mean Excess Loss (Beispiele)

Gemäß (A.4) zählen daher die Weibull ( $\tau < 1$ )-, die Lognormal- und die Paretoverteilung zu den HT-Verteilungen, wohingegen die Exponential-, die Gamma ( $\alpha > 1$ )-Verteilung sowie die Weibull ( $\tau > 1$ )-Verteilung zu den MT-Verteilungen gehören<sup>77</sup>.

<sup>76</sup> Zur entsprechenden Spezifikation der benutzten Parametrisierungen vgl. ebenfalls Mikosch (2004, 96).

<sup>77</sup> Generell gelangt man durch den Übergang von  $X$  zu  $\exp(X)$  bei Lognormal- (Basis: Normalverteilung), Pareto- (Basis: Exponentialverteilung) sowie auch bei der Loggamma-Verteilung (Basis: Gammaverteilung) von einer MT- zu einer HT-Verteilung.

Offenbar erfolgt die Konvergenz der MLE-Funktion gegen  $\infty$  aber mit unterschiedlicher Geschwindigkeit, so dass hinsichtlich einer Gefährlichkeitsordnung innerhalb der HT-Verteilungen z.B. festgehalten werden kann, dass die Paretoverteilung gefährlicher ist als die Lognormal- bzw. die Weibull ( $\tau < 1$ )-Verteilung.

Dies zeigt sich auch daran, dass die Lognormalverteilung durchwegs endliche Momente besitzt, wohingegen das n-te Moment der Paretoverteilung nur existiert, wenn  $\alpha > n$ . Insofern werden Lognormal- und Weibullverteilung auch als *moderately heavy tailed* bzw. *medium heavy tailed* bezeichnet.

Als Beispiel betrachten wir die (Nullpunkt-)Paretoverteilung (2.23) des Hauptteils mit Tailparameter  $\alpha > 0$  und Skalenparameter  $b > 0$ . Hier gilt:

$$(A.3) \quad E(X^n) = \frac{b^n}{\binom{\alpha-1}{n}} \text{ f. } n < \alpha.$$

Ein Problem<sup>78</sup> des MEL-Ansatzes besteht darin, dass die empirische Schätzfunktion für den MEL sehr empfindlich auf Datenänderungen am Verteilungsende reagiert, was sich auch bei Simulationen des MEL bestätigt. Als Alternative hierzu bietet es sich an, robuste Varianten wie etwa den Median Excess zu betrachten.

Eine generelle mathematische Charakterisierung von Zufallsvariablen  $X > 0$  mit einer „gefährlichen Verteilung“ erlaubt schließlich der Vergleich der Verteilungsenden der Summe  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  und des Maximums  $M_n = \max\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  einer Folge  $X_1, \dots, X_n, \dots$  von unabhängigen und nach  $X$  verteilten Zufallsgrößen.

*Subexponentielle Verteilungen* sind dann charakterisiert durch die Eigenschaft

$$(A.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P[\max(X_1, \dots, X_n) > x]} = 1 \text{ für alle } n \geq 2.$$

---

<sup>78</sup> Vgl. Mikosch (2004, S. 94 ff.)

Intuitiv wird somit das Verteilungsende der Summe im Wesentlichen bestimmt durch das Verteilungsende des Maximums. Hohe Werte von  $S_n$  sind im Wesentlichen bedingt durch einen hohen Verlust und weniger durch die Akkumulation vieler kleiner Verluste.

Subexponentielle Verteilungen bilden eine allgemeine Verteilungsklasse von gefährlichen Verteilungen. Sie besitzen insbesondere die Eigenschaft

$$(A.5) \quad \frac{\bar{F}(x)}{\exp(-\varepsilon x)} \rightarrow \infty \text{ f. } x \rightarrow \infty \text{ und alle } \varepsilon > 0,$$

d.h.,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  klingt langsamer ab als  $\exp(-\varepsilon x)$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Das rechte Verteilungsende nimmt somit langsamer ab als jedes exponentielle Verteilungsende. Dies impliziert, dass sich auch sehr große Werte (Schäden, Verluste) mit einer nicht vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeit realisieren können. Subexponentielle Verteilungen sind damit natürliche Kandidaten für die Modellierung von Situationen, wo – im Vergleich zum Mittelwert – extrem große Realisationen auftreten können.

Eine "besonders gefährliche" Unterklasse der subexponentiellen Verteilungen sind Zufallsvariable mit *regulär variierendem Verteilungsende* (regularly varying tail).

Intuitiv gilt

$$(A.6) \quad P(X > x) = \frac{L(x)}{x^\alpha} \text{ f. } x > 0,$$

wobei  $\alpha \geq 0$  den Tail Index bezeichnet und  $L(x)$  eine langsam variierende Funktion (in unendlich) ist. Typische Beispiele für langsam variierende Funktionen sind etwa Logarithmen. Für eine präzise mathematische Formulierung vgl. etwa Embrechts et al. (1997, S. 564 ff.) sowie Mikosch (2004, S. 105 ff.).

Beispiele für regulär variierende Verteilungen sind Pareto-, Loggamma- und  $\alpha$ -stabile Verteilungen. Bei gegebenem Tailindex  $\alpha$  gilt die Eigenschaft

$$(A.7) \quad E(X^n) = \begin{cases} \infty & \text{f. } n > \alpha \\ < \infty & \text{f. } n < \alpha . \end{cases}$$

Ein Tail-Index  $\alpha < 2$  impliziert somit insbesondere, dass die Zufallsgröße eine unendlich große Varianz aufweist.

Lehrbuchdarstellungen subexponentieller Verteilungen enthalten Embrechts et al. (1997, 39 ff.) sowie Mikosch (2004, 109 ff).



## Literaturhinweise

- Albrecher, H., O.J. Boxma (2004): A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals, *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 245 – 254.
- Albrecht, P. (1981): Über einige Eigenschaften des gemischten Poissonprozesses, *Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, Heft 2, 241 – 249.
- Albrecht, P. (1983a): Parametric multiple regression risk models: Theory and statistical analysis, *Insurance – Mathematics and Economics* 2, 49 – 66.
- Albrecht, P. (1983b): Parametric multiple regression risk models: Connections with tariffication, especially in motor insurance, *Insurance – Mathematics and Economics* 2, 113 – 117.
- Aue, F., M. Kalkbrener (2006): LDA at work, Deutsche Bank.
- Badrinath, S.G., S. Chatterjee (1991): A data-analytic look at skewness and elongation in common stock return distributions, *The Journal of Business and Economic Statistics* 9, 223 – 233.
- Basel Committee on Banking Supervision (2001): Operational Risk - Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001.
- Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004): Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen (Übersetzung der Deutschen Bundesbank), Juni 2004.
- Beard, R., T. Pentikainen, M. Pesonen (1984): *Risk Theory*, 2. Aufl., Chapman and Hall, London, New York.
- Beirlant, J., G. Matthys, G. Dierckx (2001): Heavy Tailed Distributions and Rating, *ASTIN Bulletin* 31, 37 – 58.
- Böcker, K., C. Klüppelberg (2005): Operational VaR: A Closed Form Approximation, *RISK Magazine*, December, 90 – 93.
- Böcker, K., C. Klüppelberg (2006): *Multivariate Models for Operational Risk*, TU München.
- Böcker, K., C. Klüppelberg (2007): *Modelling and Measuring Multivariate Operational Risk with Lévy Copulas*, Zentrum für Mathematik, TU München.

- Borkovec, M., C. Klüppelberg (2000): Extremwerttheorie für Finanzzeitreihen – ein unverzichtbares Werkzeug im Risikomanagement, in: Johannig, L., B. Rudolph (Hrsg.): Handbuch Risikomanagement, Band 1, Bad Soden/Ts., 219 – 244.
- Boudreault, M., H. Cossette, D. Landriault, E. Marceau (2006): On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes, *Scandinavian Actuarial Journal* 2006, 265 – 285.
- Bühlmann, H. (1970): *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer, Berlin.
- Buchwalder, M., E. Chevallier, C. Klüppelberg (1993): Approximation methods for the total claims size distributions – an algorithmic and graphical presentation, *Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker* 1993, 187 – 227.
- Chavez-Demoulin, V., P. Embrechts (2004): Smooth Extremal Models in Finance and Insurance, *Journal of Risk and Insurance* 71, 183 – 199.
- Chavez-Demoulin, V., P. Embrechts, J. Neslehova (2006): Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation, *Journal of Banking and Finance* 30, 2635 – 2658.
- Cont, R., P. Tankov (2004): *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall, Boca Raton u.a.
- Cox, D.R. (1955): Some statistical methods connected with series of events, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 17, 129 – 164.
- Cramér, H. (1930): On the mathematical theory of risk, *Skandia Jubilee Volume*, Stockholm.
- Cramér, H. (1969): Historical Review of Filip Lundberg's Work on Risk Theory, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 52, Supplement, 6 – 12.
- Cruz, M.G. (2002): *Modeling, measuring and hedging operational risk*, Wiley, Chichester.
- Daykin, C.D., T. Pentikainen, M. Pesonen (1994): *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall.
- De Fontnouvelle, P., E. Rosengren, J. Jordan (2004): *Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques*, Federal Reserve Bank of Boston.

- Degen, M., P. Embrechts, D.D. Lambrigger (2006): The Quantitative Modelling of Operational Risk: Between g- and -h and EVT, ETH Zürich.
- Deutsch, H.-P. (2004): Derivate und Interne Modelle, 3. Aufl., Schäffer-Poeschl, Stuttgart.
- Diebold, F.X., T. Schuermann, J.D. Stroughair (2000): Pitfalls and Opportunities in the Use of Extrem Value Theory in Risk Management, in: Embrechts, P. (Hrsg.): Extremes and Integrated Risk Management, London, 51 – 57.
- Dölker, A. (2006): Das operationelle Risiko in Versicherungsunternehmen, Karlsruhe.
- Dutta, K.K., D.F. Babbel (2005): Extracting Probabilistic Information from the Prices of Interest Rate Options: Tests of Distributional Assumptions, Journal of Business 78, 841 – 870.
- Dutta, K., J. Perry (2006): A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital, Federal Reserve Bank of Boston.
- Embrechts, P. (2005): How to Model Operational Risk, if you must, Vortragsunterlagen, ETH Zürich.
- Embrechts, P., H. Furrer, R. Kaufmann (2003): Quantifying Regulatory Capital for Operational Risk, Derivatives Use, Trading & Regulation 9, 217 – 233.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch (1997): Modelling Extremal Events, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Embrechts, P., G. Puccetti (2006): Aggregating risk capital, with an application to operational risk, Geneva Risk and Insurance Review 31, 71 – 79.
- Fischer, M., A. Horn, I. Klein (2003): Tuckey-type distributions in the context of financial data, Diskussionspapier 52/2003, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät, Friedrich-Alexander Universität, Erlangen-Nürnberg
- Frachot, A., P. Georges, T. Roncalli (2001): Loss Distribution Approach for Operational Risk, Credit Lyonnais.
- Frachot, A., D. Moudoulaud, T. Roncalli (2003): Loss Distribution Approach in Practice, Credit Lyonnais.

- Frachot, A., T. Roncalli, E. Salomon (2004): The Correlation Problem in Operational Risk, Credit Lyonnais.
- Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (Hrsg., 2007) : Operationelle Risiken unter Solvency II aus Sicht der Deutschen Versicherungswirtschaft und Versicherungsaufsicht, Berlin.
- Grandell, J. (1976): Doubly stochastic Poisson processes, Springer, Berlin.
- Grottko, M. (2001): Die t-Verteilung und ihre Verallgemeinerungen als Modelle für Finanzmarktdaten, Josef Eul, Köln.
- Hartmann-Wendels, T., A. Pfingsten, M. Weber (2007): Bankbetriebslehre, 4. Aufl., Springer, Berlin u.a.
- Heilmann, W.-R. (1987): Grundbegriffe der Risikotheorie, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Hoaglin, D.C. (1983): Summarizing shape numerically. The g- and -h distributions, in: Hoaglin, D.C., F. Mosteller, J.W. Tuckey (Hrsg.): Data analysis for tables, trends and shapes, Wiley, New York.
- Holton, G.A. (2003): Value-at-Risk, Academic Press, Amsterdam u.a.
- Ignatov, Z.G., V.K. Kaishev (2000): Two-Sided Bounds for the Finite Time Probability of Ruin, Scandinavian Actuarial Journal 2000, 46 – 62.
- Jaschke, S. (2002): The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations, Journal of Risk 5, 33 – 52.
- Kalemanova A., B. Schmid, R. Werner (2007): The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic CDO Pricing, Journal of Derivatives, Spring 2007, 80 – 93.
- Kassberger, S., R. Kiesel (2006): A Fully Parametric Approach to Return Modelling and Risk Management of Hedge Funds, Financial Markets and Portfolio Management 20, 472 – 491.
- Kleiber, C., S., Kotz (2003): Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, Wiley, Holbiken, N.J.

- Klüppelberg, C. (2001): Development in Insurance Mathematics, in: Engquist, B., W. Schmid, (Hrsg.): Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, Springer, Berlin, 703 – 722.
- Klugman, S., H.H. Panjer, G. Willmot (2004): Loss Models – From Data to Decisions, Wiley, Hoboken, NJ.
- Lando, D. (2004): Credit Risk Modeling, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Lundberg, O. (1964): On random processes and their application to sickness and accident statistics, 2. Aufl., Almqvist & Wiksell, Uppsala.
- Mack, T. (1997): Schadenversicherungsmathematik, Karlsruhe.
- Martinez, J., B. Iglewicz (1984): Some Properties of the Tuckey g and h Family of Distributions, Communications in Statistics – Theory and Methods 13, 353 – 369.
- McNeil, A.J. (1997): Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory, ASTIN Bulletin 27, 117 – 137.
- McNeil, A. (2000): Extreme Value Theory for Risk Managers, in: Embrechts, P. (Hrsg.): Extremes and Integrated Risk Management, London, 2 – 18.
- McNeil, A.J., R. Frey, P. Embrechts (2005): Quantitative Risk Management, Princeton University Press, Princeton, Oxford.
- Nguyen, M.-T., M. Ostmann (2005): Das dicke Ende, Risknews 04/05, 43 – 46.
- Mills, T.C. (1995): Modelling skewness and kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE index return distribution, The Statistician 44, 323 – 332.
- Mikosch, T. (2004): Non-Life Insurance Mathematics, Springer, Berlin u.a.
- Moscadelli, M. (2004): The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basle Committee, Bank of Italy.
- Neslehova, J., P. Embrechts, V. Chavez-Demoulin (2006): Infinite Mean Models and the LDA for Operational Risk, Journal of Operational Risk 1, 3 – 25.

Nguyen, M.-T., M. Ostmann (2005): Das dicke Ende, Risknews 04/05, 43 – 46.

Nyström, K., J. Skoglund (2002): Quantitative Operational Risk Management, Swedbank.

Panjer, H.H. (2006): Operational Risk, Wiley, Hoboken, NJ.

Parzen, E. (1962): Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco u.a.

Rachev, S.T., C. Menn, F.J. Fabozzi (2004): Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions, Wiley, Hoboken NJ.

Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels (1999): Stochastic Processes for Insurance and Finance, Wiley, Chichester u.a.

Schmidt, K.D. (1996): Lectures on Risk Theory, Stuttgart.

Schmidt, K.D. (2002): Versicherungsmathematik, Berlin, Heidelberg, New York.

Sundt, B. (1993): An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics, 3<sup>rd</sup> ed., Karlsruhe.

Tuckey, J.W. (1960): The practical relationship between the common transformations of counts of amounts, Princeton University Statistical Techniques Research group, Technical Report No. 36.

Tuckey, J.W. (1977): Exploratory data analysis, Addison-Wesley, Reading, M.A.